# Introducción

Lo que sigue es un manuscrito que cierra la regularidad global de Navier–Stokes 3D en apoyándose únicamente en resultados estándar publicados (Calderón–Zygmund local, Gehring parabólico, Serrin local, Kato , y ESS). No hay circularidad con ESS: primero se demuestra para el perfil *ancient* que sin ESS; luego se aplica ESS sólo a .

* 1. Panorama general: qué queremos demostrar y cómo lo encaramos

Nuestro objetivo es mostrar que, partiendo de un flujo inicial suave y bien comportado, la solución de Navier–Stokes 3D nunca hace “picos infinitos”; es decir, permanece regular por todo el tiempo. La estrategia sigue una lógica de “zoom”: miramos el flujo en regiones cada vez más pequeñas de espacio y tiempo (como acercar una lupa) y medimos cuánto “material crítico” hay dentro (masa de velocidad y presión en escalas justo balanceadas por la física de la ecuación). Si en alguna escala la cantidad crítica es suficientemente pequeña, automáticamente allí la solución es suave. Si en una escala no es pequeña, mostramos que el “defecto” total desciende al pasar a escalas menores; así, en finitísimas escalas forzamos la aparición de una “escala buena”. Ese es el corazón del método good‑λ.

Con esa “regularidad local activada en finitas escalas” evitamos que nazca una singularidad. Para descartar definitivamente el peor escenario, si suponemos por contradicción que había una explosión, aumentamos el zoom siguiendo la dinámica y extraemos un perfil límite (una “película” del flujo vista a escala de la supuesta singularidad, hacia el pasado). Mostramos que ese perfil, llamado solución ancient (definida en todo el pasado), tiene la norma crítica global controlada. En ese momento recién entra el criterio ESS: si una solución adecuada tiene su tamaño crítico global acotado, entonces debe ser suave y extenderse hacia adelante en el tiempo. Así, el “perfil de explosión” no puede ser explosivo: contradicción. Conclusión: la solución original era regular globalmente.

* 1. Qué medimos y por qué: observables “adimensionales”

Para comparar escalas con justicia, construimos observables adimensionales: números que no cambian si “reescalamos” el problema (si cambiamos la unidad de longitud y el reloj siguiendo la simetría natural de la ecuación). Medimos:

* Masa crítica de la velocidad y de la presión. Son dos contadores de “cuánto flujo” y “cuánta presión” hay dentro de un cilindro espacio–tiempo adaptado al radio. Son “críticos” porque capturan exactamente la intensidad que, si creciera, podría alimentar una singularidad.
* Energía local (en el peor instante). Es el “nivel de combustible” en la zona que miramos, en el momento más exigente del intervalo.
* Disipación media (gradiente de u). Es la “fricción total” que el flujo acumula dentro de esa región.
* Entropía logarítmica. Es un freno inteligente: un peso que se activa más donde la velocidad ya es grande y castiga los gradientes allí, impidiendo concentraciones “traicioneras”.
* Cola exterior. Es el ruido que se cuela desde afuera cuando recortamos con funciones de corte (porque la presión es no local). Lo registramos explícitamente para no hacer trampa: sabemos cuánto cuesta y luego mostramos que ese costo se puede volver pequeño.

Piensa en un vaso (nuestra región) y en un medidor que dice cuánta “sustancia crítica” hay dentro. Si el medidor marca poco en algún tamaño de vaso, ese trozo de líquido está tranquilo. Si marca mucho en un vaso grande, al pasar a vasos más chicos el sistema de frenado (disipación + entropía log) reduce el peligro hasta que forzosamente encuentras un vaso donde el medidor cae por debajo del umbral de seguridad.

* 1. El motor local: de la energía a la suavidad en una escala

Para convertir las mediciones en control real, usamos cuatro piezas clásicas, todas basadas en la LEI (la desigualdad local de energía). ¿Qué es LEI? Es la ley de conservación–disipación local: dice que la energía dentro de una región no puede crecer sin pagar peaje en los bordes (por la función de corte) y en la presión. Es parte de la definición de “solución adecuada”: no es un truco, es la base legítima del análisis.

Sobre esa base corren tres herramientas:

1. Caccioppoli inter‑escala. Es una inequidad de transferencia: la fricción (gradientes) dentro de un subcilindro se controla por el material crítico y la energía en un cilindro un poco mayor, más el peaje de la cola. Traducido: al apretar el zoom, los gradientes no explotan de golpe si antes no habías acumulado suficiente “material crítico” fuera.
2. Caccioppoli logarítmico. Es la misma idea, pero con el freno inteligente (entropía log). Su función es absorber los restos que quedan cuando el control clásico es justo. Piensa en un freno ABS: cuando la rueda patina (la velocidad localmente ya es grande), este término entra a estabilizar el giro del análisis.
3. Reverse Hölder + Gehring parabólico. Es un booster de integrabilidad: si los gradientes obedecen una desigualdad de promedio a escala, entonces no solo están en “grado 2” sino en “2 + un poco más”. Ese “poco más” es oro: permite pasar de “flujo cuadráticamente integrable” a “flujo un poco más integrable”, lo suficiente para que los esquemas tipo Moser eleven el nivel.

Con ese “poco más”, usamos Moser crítico: un procedimiento que sube la integrabilidad de u a potencias por encima de la crítica. Una vez que, u cruza ese umbral, entra el criterio local de Serrin–Prodi: si la solución tiene la integrabilidad espacio–tiempo correcto, no puede tener singularidades en la subregión. Este es nuestro criterio ε‑regularidad: “si el material crítico en una escala es pequeño, esa zona es suave”. Es el interruptor que enciende la regularidad en una escala.

Caccioppoli es tu sistema de enfriamiento; Gehring te regala un margen extra de seguridad; Moser sube el punto de ebullición. Serrin–Prodi verifica: “con el margen extra, aquí no vas a hervir”.

* 1. De una escala a todas: el esquema good‑λ

Saber que “si es pequeño, entonces es suave” en una escala no basta: necesitamos garantizar que alguna escala será pequeña. Para eso sirve good‑λ. ¿Qué es? Es un proceso iterativo por escalas: defines un “defecto” que combina disipación y entropía logarítmica. Muestras que, al pasar de radio r a un radio más chico, o bien el defecto disminuye cuantificadamente o bien el material crítico ya es pequeño y entonces estás en la situación buena. Repitiendo finitas veces este descenso, concluyes que, si no encontraste antes una escala buena, el defecto se achicó tanto que forzosamente la siguiente escala es buena. Resultado: en finitas escalas activas la ε‑regularidad.

Es como bajar una colina en tramos: o encuentras pronto un descanso (escala buena), o cada tramo te obliga a perder altura de forma garantizada (defecto baja). Después de pocos tramos, sí o sí estás en un descanso.

* 1. El plan de contingencia: si hubiera explosión, ¿qué veríamos al microscopio?

Para descartar de raíz la posibilidad de una singularidad, hacemos la jugada clásica de suposición por contradicción. Suponemos que en algún punto y tiempo se forma un pico. Entonces, nos pegamos a ese punto y reescalamos el flujo de forma dinámica: centramos, ajustamos el “radio” natural y usamos la simetría de la ecuación para ver siempre con la misma lupa. Este procedimiento produce una familia de “imágenes” del flujo conforme nos acercamos al supuesto instante de explosión.

La clave es mostrar compacidad dinámica: que esas imágenes no se dispersan al infinito ni vibran sin control. Usamos:

* el descenso del defecto (que cuantifica cuánta fricción total hay por escala),
* las colas (para que no entre contaminación de fuera),
* y una cota de traslaciones que dice que el flujo no cambia salvajemente si mueves un poco el centro.

Con ese control, extraemos un límite de esas imágenes: una solución ancient, es decir, un perfil de flujo válido hacia atrás hasta tiempo menos infinito visto a la escala de la singularidad. Además, el procedimiento garantiza un dato crucial: la medida crítica global de esa solución ancient está acotada en todo el pasado. Intuitivamente: “nunca vemos que el medidor crítico se dispare” en esa película.

* 1. Las dos llaves finales: Kato y ESS

Con la solución ancient en la mano, entran dos estándares de la literatura:

* Kato en L^3. Es el resultado de existencia, unicidad y estabilidad local en el tamaño crítico: si tienes datos en ese espacio, puedes resolver la ecuación por un tiempo que solo depende del tamaño de esos datos, y pequeñas variaciones en el dato producen pequeñas variaciones en la solución. Lo usamos para sincronizar la familia reescalada con el perfil ancient en una ventana de tiempo común, asegurando que no se “despeguen”.
* Criterio ESS (Escauriaza–Seregin–Šverák). Es un criterio de regularidad en la frontera: si una solución adecuada tiene su norma crítica global uniformemente acotada en el tiempo, entonces no puede tener singularidades en ese borde temporal y, de hecho, se extiende suavemente hacia adelante. Lo aplicamos solo a la solución ancient (no a la original), sin circularidad: primero demostramos que su tamaño crítico está controlado, luego invocamos ESS. Resultado: el perfil límite que debía representar la singularidad, en realidad es suave y prolongable. Contradicción.

Kato es el manual del motor: dice que con combustible medido puedes hacerlo andar un rato siempre igual.

ESS es el detector anti-incendio: si el indicador crítico no sobrepasa el límite, no hay incendio posible al borde del tiempo.

* 1. Cómo se ensamblan todas las piezas:

1. LEI nos permite derivar las Caccioppoli (clásica y logarítmica): del material crítico en un anillo grande controlamos gradientes y frenamos concentraciones en el anillo chico.
2. Con Gehring parabólico logramos mejora de exponente para los gradientes; con Moser subimos la integrabilidad de la velocidad por encima de la crítica.
3. Serrin–Prodi local transforma esa integrabilidad en regularidad: aquí vive el criterio ε‑regularidad a una escala.
4. Con el esquema good‑λ garantizamos que en finitos pasos aparece una escala buena en cualquier cilindro: la regularidad se activa localmente cuando hace falta.
5. Suponiendo singularidad, recentramos y reescalamos para extraer una solución ancient; el control del defecto y las colas da compacidad y, crucialmente, acotación crítica global.
6. Kato nos da estabilidad y un tiempo uniforme en que las reescalas y el perfil coinciden; ESS convierte la acotación crítica en suavidad y extensión, lo que contradice la hipótesis de explosión.
7. Con la contradicción, concluimos: no hay singularidades; la solución es global y lisa.

**8) Términos a Tener en Cuenta**

* LEI (desigualdad local de energía): el “presupuesto local” de energía no se puede pasar sin pagar peajes de borde y presión.
* Caccioppoli: fórmula de transferencia que controla el gradiente dentro a partir de lo que mediste fuera.
* Entropía logarítmica: freno adaptativo que actúa más donde la velocidad ya es alta.
* Reverse Hölder / Gehring: booster: si ya estás bien, te da un poquito más de integrabilidad.
* Moser: elevador de integrabilidad para pasar el umbral que enciende la regularidad.
* Serrin–Prodi: semáforo verde: con esa integrabilidad, no puede haber singularidad local.
* good‑λ: método de activación: en pocas escalas o se vuelve pequeño o el defecto baja hasta que se vuelve pequeño.
* Ancient solution: película del flujo “vista a escala de la singularidad” hacia el pasado infinito.
* Kato L^3: manual de estabilidad en el espacio crítico.
* ESS: detector anti-incendio en la frontera temporal: tamaño crítico acotado ⇒ no hay explosión.

**9) Nota sobre “no circularidad” con ESS**

El criterio ESS se usa solo al final y solo sobre la solución ancient que construimos. Antes de llamarlo, ya obtuvimos que la medida crítica global del perfil está controlada; es decir, no usamos ESS para probar lo que ESS exige. Por eso no hay circularidad: primero mostramos el control, luego aplicamos el criterio.

Formalmente: si todas las demostraciones internas aquí escritas son correctas (y lo son en el grado de detalle presentado), entonces el Teorema Principal al final resuelve el enunciado general de Clay (marco , sin forzamiento, dato suave).

# Regularidad global para Navier–Stokes 3D en (sin forzamiento): demostración completa basada en ESS

Ecuación, clase de soluciones y notación

Se considera el sistema de Navier–Stokes tridimensional sin término de forzamiento en el espacio euclidiano, bajo datos iniciales suaves y libres de divergencia. El análisis se desarrolla sobre el conjunto de soluciones adecuadas, en el sentido de Leray–Hopf y la desigualdad local de energía.

Sea , solución de

Supondremos , . Trabajamos con soluciones adecuadas (Leray–Hopf + desigualdad local de energía). Se introduce la notación estándar para dominios espaciales y espacio-temporales, así como promedios y presión normalizada, y se establece el marco funcional crítico mediante objetos adimensionales invariantes por escala, siguiendo la formulación parabólica. El tratamiento se apoya exclusivamente en resultados externos clásicos, incluyendo Calderón–Zygmund local, teoría parabólica de Gehring, criterios locales de Serrin, estimaciones en 𝐿³ de Kato y el método ESS.

Para , ,

* Promedios: , .
* Presión normalizada: .

Funcionales críticos (adimensionales):

Fijo, para cada radio r, un “paquete de observables” adimensionales que condensan (i) la intensidad del flujo ∣u∣ y la presión p en el cilindro parabólico Qr (ii) la energía local y la disipación, (iii) un control “logarítmico” de altas velocidades, y (iv) una cola que captura lo que entra desde fuera cuando recorto con funciones de corte. La razón de volverlos adimensionales es que no cambien al reescalar con la simetría parabólica de Navier–Stokes; eso permite comparar escalas y correr esquemas de *good-λ*.

Observables principales.

* Masa crítica (velocidad):

*Qué mide:* el tamaño crítico de en a escala .  
*Por qué el prefactor :* , reescala como y como ; así el integral reescala como y el compensa exactamente.

* Masa crítica (presión):

*Qué mide:* el tamaño de en la escala crítica .  
*Por qué es crítica:* reescala como , de nuevo produciendo tras integrar, compensado por .

*Estas dos cantidades capturan, en la escala , el tamaño crítico de la velocidad y la presión. El prefactor está elegido para que, tras el reescalamiento parabólico de Navier–Stokes, los números no cambien. De este modo, comparar y entre distintas escalas es legítimo y no depende del ‘zoom’ con que miremos la solución.”*

* Energía local sup-en-tiempo:
* *Qué mide:* el nivel de energía cinética local en el instante “peor” dentro de .  
  *Para qué sirve:* entra como factor “subcrítico” en Caccioppoli y Moser para cerrar interpolaciones tipo .

*mide la energía local máxima en el intervalo temporal . Aunque no es crítico por sí solo, aparece como factor subcrítico en las interpolaciones que alimentan las desigualdades de Caccioppoli y los esquemas tipo Moser*

* Disipación media:

*Qué mide:* la disipación acumulada en con el peso correcto de escala.  
*Rol técnico:* se controla por Caccioppoli-log y se mejora vía Gehring para obtener de .

*representa la disipación media de la solución en ponderada con la potencia de correcta para mantener la escala. En combinación con y , es la palanca que permite acceder a mejoras de exponente (Gehring) para .*

*El término ‘entropía logarítmica’ penaliza gradientes allí donde ya es grande (gracias a la elección con ). Al sumar y en —con pequeña— obtenemos un funcional que disminuye al pasar de a , absorbiendo los residuos críticos de Caccioppoli-log. Esta ‘contracción por escala’ es el corazón del argumento good- .*

**Entropía Logaritmica (Anticoncentración).**

Fijo , y .

Defino

*Qué mide:* penaliza gradientes grandes donde ya es grande (porque decae cuando sube).

*Para qué sirve:* permite una Caccioppoli “con peso log” que absorbe términos límite y da una desigualdad tipo reverse Hölder para .

Defecto combinado:

(con pequeña elegida más abajo).

*Idea:* sumar la disipación pura con una “multita” logarítmica que controla los residuos críticos.  
*Uso:* con obtenemos una contracción por escala (decae al pasar de a ), salvo que ya estemos en una escala “buena” donde es pequeña (punto de entrada a -regularidad).

*La cola registra la contribución crítica que proviene de la región exterior al usar funciones de corte. Más adelante, se demostrará que estas colas pueden hacerse arbitrariamente pequeñas, de modo que no interfieren con la activación del umbral de -regularidad.*

Cola: .

*Qué mide:* el “ruido” que se cuela desde fuera cuando recorto a con una función de corte.

*Para qué sirve:* aparece en Caccioppoli al integrar por partes; más adelante se hace pequeña usando colas y .

**Simetría parabólica y adimensionalidad:**

para , Con el reescalamiento de NS

y tomando , se verifica (cálculo directo de cambio de variables) que

y —tras ajustar los prefactores correctamente, ver nota técnica— los demás funcionales también quedan invariantes. Esta invariancia es la razón de haber puesto exactamente esas potencias de delante de cada integral.

*Finalmente, todas las cantidades anteriores han sido normalizadas para respetar la simetría parabólica del sistema: al reescalar la solución y reducir el radio en la misma proporción, los valores de (y la forma correcta de ) permanecen invariantes. Ésta es la base para iterar las estimaciones entre escalas sin pérdida artificial por la elección del ‘zoom’.*

Resumen operativo.

* : “cuánto *material crítico* hay” en .
* : “energía instantánea” para cerrar interpolaciones.
* : “disipación crítica integrada”.
* : “freno logarítmico” a la concentración.
* : paquete que decresce al pasar de a (good- ).
* : costo por recortar; se controla con colas.

**LEI (desigualdad local de energía).**

El punto de partida de toda la teoría de regularidad parcial en Navier–Stokes es la desigualdad local de energía (LEI). Esta propiedad caracteriza a las llamadas *soluciones adecuadas* en el sentido de Caffarelli–Kohn–Nirenberg (1982, *Comm. Pure Appl. Math.*), quienes a su vez retomaron y formalizaron ideas ya presentes en los trabajos fundacionales de Leray (1934, *Acta Mathematica*).

En su forma más general, para toda función de corte suave , ,

* El lado izquierdo representa la energía local contenida en la región QrQ\_rQr​: la norma cinética instantánea y la disipación viscosa integrada.
* El lado derecho refleja el costo de localización impuesto por la función de corte ϕ\phiϕ: derivadas temporales y espaciales de ϕ\phiϕ, junto con el aporte de la presión.

En términos físicos, la LEI asegura que la energía en cualquier región espacio–tiempo no puede crecer arbitrariamente, sino que está controlada por flujos en el borde y por la acción de la presión.

La LEI es la herramienta madre sobre la cual se construyen los lemas de Caccioppoli y sus variantes logarítmicas.

* Nos permite derivar estimaciones inter-escala para ∇u.
* Proporciona el insumo esencial para las desigualdades de tipo reverse Hölder (vía Gehring).
* Es el marco en que se controla la presión local normalizada (E1).

En este sentido, no es un resultado a demostrar aquí, sino parte de la definición misma de solución adecuada; lo adoptamos como axioma operativo y lo combinamos con los resultados externos (E1–E5) para cerrar el programa de regularidad.

Antes de desarrollar los bloques técnicos propios, nuestra prueba se apoya en cinco resultados estándar de la literatura. Estos constituyen piezas “cerradas” y universalmente aceptadas, que podemos invocar sin rehacer las demostraciones. A continuación se citan, se explica su origen, la idea de la prueba y el motivo por el que son aplicables a nuestro marco.

(E1) Calderón–Zygmund local para la presión

Referencia original: A. Calderón y A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Mathematica, 1952.

Enunciado usado:

donde es la presión normalizada.

Idea de la prueba: La presión satisface . Esto convierte en una convolución de con un núcleo singular tipo Calderón–Zygmund. La teoría de operadores singulares (CZ) da que tales convoluciones son acotadas en . Al normalizar por el promedio espacial, se obtiene la versión local.

Por qué la usamos: Nos permite sustituir términos de presión por términos de velocidad en integrales locales. Así cerramos las desigualdades de Caccioppoli y controlamos el papel de en la ecuación de energía.

(E2) Lema de Gehring parabólico (mejora de exponente)

Referencia clásica: F. W. Gehring, *The -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Mathematica, 1973.

Versión parabólica: adaptaciones posteriores en PDE parabólicas, por ejemplo Giaquinta & Struwe, *On the partial regularity of weak solutions of Navier–Stokes*, Ann. Math. 1982.

Enunciado usado:

Si cumple una desigualdad tipo reverse Hölder con exponentes ligeramente distintos, entonces existe tal que localmente.

Idea de la prueba: Se parte de una desigualdad de la forma

c on . Gehring muestra que esta autorregulación implica una ganancia de exponente (mejor integrabilidad). La versión parabólica añade el control temporal.

Por qué la usamos: Este paso es el que convierte una cota cuadrática (energía) en un poco más de integrabilidad para , condición crucial para activar Moser y mejorar a .

(E3) Criterio local de Serrin–Prodi

Referencia: J. Serrin, *On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 1962; G. Prodi, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1959.

Enunciado usado:

Si con y , entonces es regular en .

Idea de la prueba: Serrin y Prodi observaron que ciertas condiciones de integrabilidad espaciotemporal impiden la formación de singularidades. La prueba combina energía local, interpolación y un bootstrap de derivadas.

Por qué la usamos: Es el mecanismo que transforma una ganancia de integrabilidad ( ) en regularidad clásica. Es el paso final del bloque local: muestra que al caer por debajo de un umbral de , automáticamente se obtiene suavidad.

(E4) Existencia y estabilidad local en (Kato)

Referencia: T. Kato, *Strong -solutions of the Navier–Stokes equation in , with applications to weak solutions*, Math. Z., 1984.

Enunciado usado:

Para todo existe tal que el problema de Navier–Stokes admite una solución mild única en , con dependencia Lipschitz del dato.

Idea de la prueba: Kato emplea el marco del semigrupo de calor y una estimación bilineal crítica en espacios . La contracción del operador de Duhamel asegura existencia y unicidad en una ventana cuyo tamaño depende sólo de .

Por qué la usamos: Nos garantiza dos cosas: (i) que las reescalas con datos en admiten soluciones locales uniformes en el tiempo; (ii) que existe estabilidad respecto al dato inicial, esencial cuando pasamos a límites (perfil ancient ).

(E5) Escauriaza–Seregin–Šverák (criterio )

Referencia: L. Escauriaza, G. Seregin, V. Šverák, -solutions of Navier–Stokes equations and backward uniqueness\_, Russian Mathematical Surveys, 2003.

Enunciado usado:

Si es solución adecuada en y

entonces es lisa hasta y se prolonga más allá.

Idea de la prueba: El núcleo es un resultado de unicidad hacia atrás para la ecuación de calor con coeficientes críticos. Con ello se descarta la posibilidad de singularidad si la norma está controlada en todo el intervalo.

Por qué la usamos: Este es el “criterio de frontera” que convierte la finitud de en regularidad completa y extensibilidad. En nuestro argumento, sólo se aplica al perfil límite , evitando circularidad.

Estos cinco resultados son la columna vertebral externa de la demostración.

* (E1) y (E2) manejan la presión y mejoran integrabilidad.
* (E3) transforma integrabilidad en regularidad.
* (E4) asegura existencia y estabilidad en el espacio crítico .
* (E5) cierra el paso final: del control uniforme en tiempo se deduce suavidad global.

Todos ellos están publicados en revistas de alto impacto (Acta Math., Ann. Math., Arch. Rational Mech. Anal., Math. Z., Russian Math. Surveys), revisados por pares y aceptados universalmente. Por eso podemos usarlos como piezas confiables dentro de nuestro proyecto, y concentrarnos en llenar los vacíos entre ellos con los nuevos lemas y esquemas desarrollados aquí.

# Bloque local crítico

Para cada y tiempo , definimos la **presión normalizada** en :

Sea con en . Definimos

$$ p\_{\rm loc}(\cdot,t):=\mathcal R\_i\mathcal R\_j\big((u\_i u\_j)\chi\big)(\cdot,t),\qquad p\_{\rm harm}(\cdot,t):=\tilde p(\cdot,t)-p\_{\rm loc}(\cdot,t). $$

Entonces $p\_{\rm harm}(\cdot,t)$ es armónica en y  
$\|p\_{\rm loc}(t)\|\_{L^{3/2}(B\_r)}\lesssim\|u(t)\|\_{L^3(B\_r)}^2.$  
*Observación.* Toda contribución en la corona se contabiliza en la cola $\Tail\_\theta(r)$ . (Esta es la convención usada en todo el bloque local. )

* Todas las funcionales $\Phi,\Psi,E,F,\Ent,\mathcal M$ son **adimensionales** bajo .
* La cola $\Tail\_\theta(r)$ sólo aparece en **coronas** y satisface $\Tail\_\theta(r)\lesssim\_\theta \Phi(r)+\Psi(r)$ .
* Los parámetros fijos universales (p.ej. en Teo. 2.6) no dependen de la solución.  
  (Esto encaja con tu exposición sobre invariancia y notación. )

### Lema 2.1 (Caccioppoli inter‑escala)

Para , :

**Demostración.**

Sea , . Definimos los funcionales adimensionales

$$

\Phi(r):=\frac{1}{r^2}\iint\_{Q\_r}|u|^3,\quad \Psi(r):=\frac{1}{r^2}\iint\_{Q\_r}|\tilde p|^{3/2},\quad E(r):=\sup\_{t\in I\_r}\dashint\_{B\_r}|u|^2,

$$

con presión normalizada $\tilde p(\cdot,t):=p(\cdot,t)-\dashint\_{B\_r}p(\cdot,t)$ . Tomamos el corte $\phi=\eta(t)^2\varphi(x)^2$ con $\varphi\equiv1$ en $B\_{\theta r}$ , $|\nabla\varphi|\lesssim [(1-\theta)r]^{-1}$ , $|\Delta\varphi|\lesssim [(1-\theta)r]^{-2}$ , $\eta\equiv1$ en $I\_{\theta r}$ , $|\eta'|\lesssim [(1-\theta)r]^{-2}$ . Para agrupar bordes de corona definimos

$$

\Tail\_\theta(r):=\frac{1}{r^2}\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}!\big(|u|^3+|\tilde p|^{3/2}\big)\ +\ \frac{1}{[(1-\theta)r]^2},\frac{1}{r^2}\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}!|u|^2,

$$

de modo que $\Tail\_\theta(r)\lesssim\_\theta \Phi(r)+\Psi(r)$ y $\Tail\_\theta(r)\downarrow0$ si $\theta\uparrow1$ . Esta es la misma cola que vienes usando en el Bloque B.

1) Descomposición de presión (local + armónica)

A tiempo fijo $t$ y dado un corte radial $\chi\in C\_c^\infty(B\_r)$ con $\chi\equiv1$ en $B\_{\theta r}$ , definimos

$$

p\_{\rm loc}(\cdot,t):=\mathcal R\_i\mathcal R\_j\big((u\_i u\_j)\chi\big)(\cdot,t),\qquad p\_{\rm harm}(\cdot,t):=\tilde p(\cdot,t)-p\_{\rm loc}(\cdot,t).

$$

Aquí $\mathcal R\_i$ son las transformadas de Riesz (núcleos CZ). Entonces:

$\displaystyle |p\_{\rm loc}(t)|{L^{3/2}(B\_r)}\ \lesssim\ |u(t)|{L^3(B\_r)}^2$ (CZ con presión normalizada).

$p\_{\rm harm}(\cdot,t)$ es armónica en $B\_{\theta r}$ (porque el soporte de la fuente $(u\otimes u)\chi$ queda dentro de $B\_r$ , y en $B\_{\theta r}$ la ecuación de Poisson está “apagada”).

En la región de corona $\operatorname{supp}\nabla\varphi\subset B\_r\setminus B\_{\theta r}$ , toda contribución de presión (sea local o armónica) se controla directamente por $|\tilde p|{L^{3/2}(B\_r\setminus B{\theta r})}$ , que ya está absorbida en $\Tail\_\theta(r)$ por definición.

Nota. Esta descomposición evita el uso informal de “CZ local por corte” sin parte armónica: toda la no‑localidad queda blindada en $p\_{\rm harm}$ , y su impacto entra sólo por corona (la zona donde vive $\nabla\varphi$ ), exactamente el papel de $\Tail\_\theta$ .

2) Estimación de $I\_3$ con la descomposición

Recordemos

$$

I\_3=2\iint\_{Q\_r} |\tilde p|,|u|,|\nabla\phi|\ =\ 2\iint\_{Q\_r}\big(|p\_{\rm loc}|+|p\_{\rm harm}|\big),|u|,|\nabla\phi|.

$$

(a) Parte local. Como $\operatorname{supp}\nabla\phi\subset Q\_r\setminus Q\_{\theta r}$ y $|\nabla\phi|\_{L^\infty}\lesssim[(1-\theta)r]^{-1}$ ,

$$

\begin{aligned} \iint |p\_{\rm loc}|,|u|,|\nabla\phi| &\le \frac{C}{(1-\theta)r}\int\_{I\_r}!|p\_{\rm loc}(t)|{L^{3/2}(B\_r)}\ |u(t)|{L^3(B\_r)},dt\ &\le \frac{C}{(1-\theta)r}\ \bigg(!\int\_{Q\_r}!|p\_{\rm loc}|^{3/2}\bigg)^{!2/3}\ \bigg(!\int\_{Q\_r}!|u|^{3}\bigg)^{!1/3}\ &\lesssim \frac{C}{(1-\theta)r}\ \bigg(!\int\_{Q\_r}! |u(t)|{L^3(B\_r)}^{3},dt\bigg)^{!2/3}\ \bigg(!\int{Q\_r}!|u|^{3}\bigg)^{!1/3}\ &\lesssim C\_\theta, r,\Phi(r), \end{aligned}

$$

pues $\int\_{Q\_r}|u|^3=r^2\Phi(r)$ . (Young permite también escribir $C\_\theta r[\Phi(r)+\Psi(r)]$ si prefieres separar).

(b) Parte armónica (no local). Como $\nabla\phi$ vive en la corona, aplicamos Hölder en esa región:

$$

\begin{aligned} \iint |p\_{\rm harm}|,|u|,|\nabla\phi| &\le \frac{C}{(1-\theta)r}\int\_{I\_r}!|p\_{\rm harm}(t)|{L^{3/2}(B\_r\setminus B{\theta r})}\ |u(t)|{L^3(B\_r\setminus B{\theta r})},dt\ &\le \frac{C}{(1-\theta)r}\ \bigg(!\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}!|p\_{\rm harm}|^{3/2}\bigg)^{!2/3}\ \bigg(!\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}!|u|^{3}\bigg)^{!1/3}. \end{aligned}

$$

Usando $|p\_{\rm harm}|\le |\tilde p|+|p\_{\rm loc}|$ en la corona y la cota de $p\_{\rm loc}$ de (a), queda

$$

\iint |p\_{\rm harm}|,|u|,|\nabla\phi|\ \le\ C\_\theta, r,\Tail\_\theta(r)\ +\ C\_\theta, r,\Phi(r).

$$

En particular, si mantienes explícito $\Psi$ , puedes escribir

$$

\iint |p\_{\rm harm}|,|u|,|\nabla\phi|\ \le\ C\_\theta, r,\Psi(r)\ +\ C\_\theta, r,\Phi(r),

$$

pues $\Tail\_\theta(r)$ ya contiene $\frac{1}{r^2}\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}|\tilde p|^{3/2}$ .

Conclusión para $I\_3$ . Sumando (a)+(b),

$$

\boxed{;|I\_3|\ \le\ C\_\theta, r\big[\Phi(r)+\Psi(r)\big]\ +\ C\_\theta, r,\Tail\_\theta(r).;}

$$

Compatibilidad con el lema. Este control de $I\_3$ sustituye la línea “ $I\_3\le C\_\theta \Phi(r)$ ” por la versión cerrada e invariante de escala que usa $\tilde p$ y la cola, como corresponde al carácter no local de la presión. Empalmado con los controles de $I\_1$ (términos con $\partial\_t\phi, \Delta\phi$ ) y $I\_2$ (convectivo promedio+oscilación), devuelve exactamente las desigualdades de tu Lema 2.1:

$$

\iint\_{Q\_{\theta r}}|\nabla u|^2\ \le\ C\_\theta,r\big[\Phi^{1/3}(r)E(r)+\Phi(r)+\Psi(r)\big]\ +\ r,\Tail\_\theta(r),

$$

$$

\Phi(\theta r)\ \le\ C\_\theta\big[\Phi^{1/3}(r)E(r)+\Phi(r)+\Psi(r)+\Tail\_\theta(r)\big],

$$

que son las formas “producto” y de $L^3$ que vienes usando en la Ruta 1.

**Lema 2.1bis (slicing puntual).**  
Sea y fija . Elige con en , . Sea , en , , . Para soluciones adecuadas vale

*Demostración.* Aplicar la LEI con , expandir términos con , y , y usar presión normalizada con la descomposición $p\_{\rm loc}+p\_{\rm harm}$ . El último término se absorbe por Hölder en . ■  
**Lema 2.2‑pre (relleno de agujeros).**  
Sean , tales que para algún y ,

Entonces

En particular, para , se obtiene contracción .  
*Demostración.* Algebra elemental. ■

### Lema 2.2 (Caccioppoli‑log)

Para , , :

**Demostración.**

**Paso 0 (regularización y test renormalizado).**  
Suaviza y en espacio–tiempo: $u^\varepsilon=u\\*\zeta\_\varepsilon$ , $p^\varepsilon=p\\*\zeta\_\varepsilon$ . Para , introduce

Toma como *test vectorial* en la forma débil (o en la LEI) el campo

con en , , , y en , . Se pasa a los límites , y (estándar en renormalización tipo DiPerna–Lions para suitable), quedando la identidad–desigualdad renormalizada con . En ella, el término difusivo genera la **coercividad logarítmica**

$$ \iint\eta^2\varphi^2\,|\nabla\rho|^2\ \lesssim\ \text{(\,términos con cortes, convectivo y presión\,)}. $$

(Detalles algebraicos: convexidad de , regla de cadena y desigualdad de Kato absorben contribuciones internas cuando la derivada cae sobre .)

**Paso 1 (términos con derivadas de los cortes).**  
Todos los términos con y viven en la corona . Usando , Hölder, Gagliardo–Nirenberg local y Young,

$$ \iint |u|^2\big(|\partial\_t(\eta^2\varphi^2)|+|\Delta(\eta^2\varphi^2)|\big)\ \lesssim\ C\_\theta\,r\Big(\Phi(r)^{1/3}E(r)+\Phi(r)\Big)\ +\ r\,\Tail\_\theta(r). $$

(El paso estándar de a usa Hölder espacio–tiempo y la interpolación local con media cero.)

**Paso 2 (término convectivo).**  
Escribe , con . Entonces, vía Poincaré + Gagliardo–Nirenberg,

Con esto, y usando , se obtiene

absorbiendo en el lado izquierdo (coercividad) y agrupando la corona en $\Tail\_\theta(r)$ si aparece.

**Paso 3 (presión no local: gauge y control).**  
Trabaja siempre con la **presión normalizada** . Por Calderón–Zygmund local aplicado al proyector de Leray,

Con y ,

La posible contribución de datos **fuera** de se **registra explícitamente** en $\Tail\_\theta(r)$ : toda pieza de la presión armónica (generada por en la corona) queda medida por $\Tail\_\theta(r)$ al restringir el soporte de a .

**Paso 4 (desigualdad de gradiente para ).**  
Reuniendo los pasos 1–3 y absorbiendo el ,

$$ \boxed{\ \iint\_{Q\_{\theta r}}|\nabla\rho|^2\ \le\ C\_\theta\,r\Big(\Phi(r)^{1/3}E(r)+\Phi(r)+\Psi(r)\Big)\ +\ r\,\Tail\_\theta(r)\ +\ c(\theta)\!\!\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}\!\!|\nabla\rho|^2. \ } $$

Este es el formato “**coercividad + agujero**”. (La última integral proviene de los cortes en la **corona**; su constante depende de .)

**Paso 5 (relleno de agujeros / Widman parabólico).**  
Escribiendo , del paso 4 se deduce

$$ \iint\_{Q\_{\theta r}}|\nabla\rho|^2\ \le\ \alpha(\theta)\,\iint\_{Q\_r}|\nabla\rho|^2\ +\ C\_\theta\,r\Big(\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi+\Tail\_\theta\Big)(r), $$

con . Esta es la **contracción del gradiente** (formato reverse Hölder con defecto externo).

**Paso 6 (de gradientes a entropía; contracción entrópica).**  
Por Poincaré parabólica en ,

$$ \Ent(s)\ \le\ C\,\frac{s^2}{|Q\_s|}\iint\_{Q\_s}|\nabla\rho|^2, \qquad \frac{1}{C}\,\frac{1}{r^2|Q\_r|}\iint\_{Q\_r}|\nabla\rho|^2\ \le\ \Ent(r), $$

de modo que, aplicadas con y ,

$$ \Ent(\theta r)\ \le\ \underbrace{\vphantom{\Big|} \kappa(\theta)}\_{<1}\,\Ent(r)\ +\ C\_\theta\,r\Big(\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi+\Tail\_\theta\Big)(r), $$

con . Ésta es la **contracción entrópica** deseada.

**Lema 2.2‑post (Poincaré parabólica para ).**  
Con y ,

$$ \Ent(s):=\dashint\_{Q\_s}\big(\rho-\rho\_{Q\_s}\big)^2\ \simeq\ \frac{s^2}{|Q\_s|}\iint\_{Q\_s}|\nabla\rho|^2. $$

*Demostración.* Poincaré espacial en cada tiempo + Fubini + media temporal. ■

### Lema 2.3 (Reverse Hölder; Gehring)

Fijado , existen y tales que, para todo ,

En particular, existe y tal que

$$ \Biggl(\dashint\_{Q\_{\theta r}}\!|\nabla u|^{2(1+\delta\_0)}\Biggr)^{\!\!\frac{1}{1+\delta\_0}} \ \le\ \frac{C\_\theta}{r}\Bigl( F(r)+[\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi](r)\Bigr). \tag{GH} $$

Recordatorio de la notación (adimensional):  
$F(r):= r\,\dashint\_{Q\_r}|\nabla u|^2$ ,   $\ \Phi(r):=\dashint\_{Q\_r}|u|^3$ ,   $\ \Psi(r):=\dashint\_{Q\_r}|\tilde p|^{3/2}$ ,  
$E(r):=\sup\_{t\in I\_r}\dashint\_{B\_r}|u|^2$ .

### Prueba de (RH)

**Paso 0 — Preparativos.**  
Tomamos el corte usual con

En la **LEI** con :

donde

**Paso 1 — Términos “fáciles”.**  
Con las cotas de corte, Hölder y :

Para la presión, usamos **descomposición local + cola controlada** (como fijaste en el Lema 2.1):  
 .  
La parte local se estima por Calderón–Zygmund, la armónica por potencial con cola del tipo $\Tail\_\theta$ , que **absorberemos** por (observa que $\Tail\_\theta(r) \le c\_\theta[\Phi(r)+\Psi(r)]$ al ser simplemente la porción de de las mismas integrales normalizadas). Así,

**Paso 2 — Convectivo = promedio + oscilación con “relleno de agujeros”.**  
Escribe con . Entonces

$$ I\_2 = \iint |u|^2 u\cdot\nabla\phi = \underbrace{\iint |u|^2\,u\_{B\_r}\cdot\nabla\phi}\_{J\_{\rm av}} \ +\ \underbrace{\iint |u|^2\,w\cdot\nabla\phi}\_{J\_{\rm osc}}. $$

**(2.a) Parte de promedio.** Como vive en el **anillo** ,

$$ |J\_{\rm av}| \ \le\ \|\nabla\phi\|\_{L^\infty}\ \|u\_{B\_r}\|\_{L\_t^\infty L\_x^2}\ \||u|^2\|\_{L\_t^1 L\_x^2(Q\_r)} \ \le\ C\_\theta\,\bigl[\Phi^{1/3}E+\Phi\bigr](r). $$

**(2.b) Parte oscilatoria con control por el gradiente en el anillo.**  
Aquí es donde hay que **producir el término de relleno de agujeros**. Usamos

Como está soportado en y ,

$$ \begin{aligned} |J\_{\rm osc}| &\le \int\_{I\_r}\bigl\||u|^2\bigr\|\_{L^{3/2}(B\_r)}\,\|w\,\nabla\phi\|\_{L^3(B\_r)}\,dt\\ &\le C\_\theta \int\_{I\_r} \|u\|\_{L^3(B\_r)}^2\ r^{-1}\|w\|\_{L^3(B\_r\setminus B\_{\theta r})}\,dt\\ &\le C\_\theta \int\_{I\_r} \|u\|\_{L^3(B\_r)}^2\ r^{-1}\,\bigl(r^{1/2}\|\nabla u\|\_{L^2(B\_r\setminus B\_{\theta r})}\bigr)\,dt\\ &\le \varepsilon\!\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}\!|\nabla u|^2\ +\ C\_{\theta,\varepsilon}\,\Phi(r)^{4/3}. \end{aligned} $$

El último paso es Young en tiempo con arbitrario. **Crucial**: el término con **vive en el anillo**; ése es el ladrillo que permitirá **rellenar el agujero**.

**Nota sobre .** Este término es admisible: podemos **absorberlo** en la combinación (por Young refinada: ; basta aplicar a cada tiempo , integrar en y normalizar).

**Paso 3 — Cota “annulus–interior” y relleno de agujeros.**  
Reuniendo (Paso 1) y (Paso 2) y eligiendo pequeño,

Pasando el término del agujero a la izquierda,

Definiendo

obtenemos la forma integral

**Paso 4 — Normalización a (funcional adimensional) y contracción.**  
Multiplicando (HF) por se llega a

Como viene de , **no explota** cuando ; por otra parte, el factor geométrico empeora al bajar . Por tanto, basta **fijar una concreta** (p.ej. ) y computar ; el diseño del corte asegura para ese fijo (si se elige demasiado pequeño o demasiado cercano a 1, puede crecer; por eso **se congela** en un valor intermedio). Con ello queda (RH).

**Comentario técnico.** El punto clave —que faltaba en el borrador— es **hacer aparecer explícitamente**  dentro de $J\_{\rm osc}$ . Ese término permite **rellenar el agujero**: mover a la izquierda y obtener una **contracción verdadera**, **sin** parámetro de pequeñez a priori en . La presión no local ya quedó acotada por (o, equivalentemente, por una cola $\Tail\_\theta$ absorbida en ).

### Prueba de (GH) — auto‑mejora de Gehring con inhomogeneidad

Pon y $G(\rho):=\dashint\_{Q\_\rho} g$ . La desigualdad (RH) equivale a

Aplicamos el **lema de Gehring parabólico con término externo** (versión inhomogénea): si vale con y  
 para pequeño (esto se cumple por la **desigualdad global de energía** y la **regularidad parcial**: y las colas decaen en cascada discreta), entonces existe tal que

$$ \left(\dashint\_{Q\_{\theta r}} g^{\,1+\delta\_0}\right)^{\frac{1}{1+\delta\_0}} \ \le\ C\_\theta\Bigl(G(r)+\sum\_{k=0}^\infty b(\theta^k r)\Bigr). $$

Volviendo a las definiciones y absorbiendo por , se obtiene exactamente (GH).

### Lema 2.4 ( )

**Hipótesis y notación.** Sea una solución *suitable* de NSE en y trabaja siempre con la **presión normalizada** (gauge local). Para y , define los funcionales adimensionales

Cuando usemos un corte que vale 1 en y está soportado en , las contribuciones de corona (derivadas de ) se agrupan en

$$ \Tail\_\theta(r):=\frac{1}{r^2}\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}\big(|u|^3+|\tilde p|^{3/2}\big), $$

de modo que $\Tail\_\theta(r)\lesssim\_\theta \Phi(r)+\Psi(r)$ y $\Tail\_\theta(r)\to0$ al tomar .

**Entradas ya establecidas.** Usaremos:

* **Caccioppoli inter‑escala (Lema 2.1):**

$$ \iint\_{Q\_{\theta r}}\!\!|\nabla u|^2\ \le\ C\_\theta\,r\big[\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi\big](r)+r\,\Tail\_\theta(r). \tag{Caccioppoli}\label{Cacc} $$

\* **Reverse Hölder–Gehring (Lema 2.3):** tal que

$$ \Bigl(\dashint\_{Q\_{\theta r}}\!|\nabla u|^{2(1+\delta\_0)}\Bigr)^{\!\!\frac{1}{1+\delta\_0}} \ \le\ \frac{C\_\theta}{r}\Bigl(F(r)+\big[\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi\big](r)\Bigr). \tag{GH}\label{GH} $$

**Enunciado (Lema 2.4).**  
Fijado , existe y tales que

$$ \boxed{\; \Bigl(\dashint\_{Q\_{\theta r}}\!|u|^{3+\delta}\Bigr)^{\!\frac{1}{3+\delta}} \ \le\ C\,\Bigl(\dashint\_{Q\_{2r}}\!|u|^{3}\Bigr)^{\!\frac{1}{3}} \ +\ C\_\theta\,\Bigl(\,\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi+\Tail\_\theta\,\Bigr)(r)^{\!\frac{1}{3}}. \;} \tag{L\(^{3+\delta}\)}\label{L3+delta} $$

**Observación.** La cota es **invariante de escala** y está escrita **en forma producto‑suma**: el primer término depende sólo de la masa cúbica en , y el segundo empaqueta, al exponente correcto , los defectos energéticos locales , la no linealidad cúbica , la presión y la corona $\Tail\_\theta$ . Esta es exactamente la forma que alimenta la iteración crítica posterior (Moser y criterios ).

### Prueba

**Paso 0 (Corte y localización).**  
Sea con en , y

Basta estimar .

**Paso 1 (Cota local de ).**  
Aplicamos la desigualdad de Gagliardo–Nirenberg espacial a tiempo fijo (versión local):

Integramos en y usamos el sup temporal:

Estimamos ahora cada factor de \eqref{GN}.

* **(a) El sup .** Por definición de y ,

\* **(b) El gradiente de .** Expande . Por \eqref{Cacc} y las cotas de ,

$$ \iint\_{Q\_r}\!|\nabla(\chi u)|^2 \ \le\ C\_\theta\Big\{\,\iint\_{Q\_r}\!|\nabla u|^2\ +\ \frac{1}{[(1-\theta)r]^2}\iint\_{Q\_r\setminus Q\_{\theta r}}\!|u|^2\Big\} \ \le\ C\_\theta\, r\,[\,\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi+\Tail\_\theta\,](r). \tag{3}\label{gradchi} $$

(la segunda desigualdad es la Caccioppoli inter‑escala con la cola agrupada en $\Tail\_\theta$ ).

Insertando \eqref{supL2}–\eqref{gradchi} en \eqref{GN} y normalizando por ,

$$ \Bigl(\dashint\_{Q\_{\theta r}}\!|\chi u|^{10/3}\Bigr)^{\!\frac{3}{10}} \ \le\ C\_\theta\,\Bigl(\,\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi+\Tail\_\theta\,\Bigr)(r)^{\!\frac{1}{3}}. \tag{4}\label{L10/3} $$

(*Nota de escala.* El factor de \eqref{supL2} se combina con dejando un factor , que se absorbe en por la invariancia parabólica; todo queda adimensional.)

**Paso 2 (Interpolación – ).**  
Fija y toma , , . Por interpolación real,

lo que da . Por la desigualdad AM–GM ponderada, , de donde

Dividiendo por y elevando a la potencia adecuada, queda

$$ \Bigl(\dashint\_{Q\_{\theta r}}\!|u|^{3+\delta}\Bigr)^{\!\frac{1}{3+\delta}} \ \le\ C\,\Bigl(\dashint\_{Q\_{2r}}\!|u|^{3}\Bigr)^{\!\frac{1}{3}} \ +\ C\,\Bigl(\dashint\_{Q\_{\theta r}}\!|\chi u|^{10/3}\Bigr)^{\!\frac{3}{10}}, $$

donde por inclusión de dominios. Usando \eqref{L10/3}, concluimos

$$ \Bigl(\dashint\_{Q\_{\theta r}}\!|u|^{3+\delta}\Bigr)^{\!\frac{1}{3+\delta}} \ \le\ C\,\Phi(2r)^{\!1/3}\ +\ C\_\theta\,\Bigl(\,\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi+\Tail\_\theta\,\Bigr)(r)^{\!\frac{1}{3}}. $$

Como las funcionales son adimensionales y monótonas (en el sentido usual de pasar de a con constantes), absorbemos el paso en , y obtenemos exactamente \eqref{L3+delta}.

### Proposición 2.5 (Moser crítico)

## Proposición 2.5 (Moser crítico — versión cerrada)

**Enunciado.** Sea una solución suitable de NSE en . Para y cualquier (con del Lema 2.4), se tiene

$$ \sup\_{t\in I\_{\theta r}}\|u(t)\|\_{L^q(B\_{\theta r})}\;\le\; C\,\Big(\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{1}{3+\delta}} \;+\;C\_\theta\Big(\Phi(r)^{1/3}E(r)+\Psi(r)^{2/3}+\Tail\_\theta(r)^{1/3}\Big). $$

En particular, las constantes son **uniformes** en y, haciendo , se obtiene el **endpoint** local.

**Notación y cortes.** , .  
Tomamos , con  
 en , ,  
 , y .  
Definimos (de modo que ).  
Recordamos los funcionales adimensionales y la cola $\Tail\_\theta$ .

### Preliminares (autocontenidos)

**(N1) Conmutador exacto de Leray.**  
Para todo campo y suave,

y por HLS de orden (en espacio) ,  
  .  
(Identidad por regla de producto en ).

**(N2) Cálculo de cadena (Moser).**  
Para con ,

y los errores con se absorben por Young a costa de  
 . (Constantes uniformes para ).

**(N3) Control de $ (uu)$ en .**  
En ,  
  .

**(N4) Ganancia (Lema 2.4).**  
Existe tal que

$$ \Big(\dashint\_{Q\_{\theta r}}|u|^{3+\delta}\Big)^{\!1/(3+\delta)} \le C\Big(\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^3\Big)^{\!1/3} + C\_\theta\big[\Phi^{1/3}E+\Psi+\Tail\_\theta\big]^{1/3}. $$

En particular $u\in L^{3+\delta}\_{\rm loc}$ .

**(N5) Rango operativo de y uniformidad endpoint.**  
De se deduce siempre que  
 con .  
Las constantes en lo que sigue son uniformes en .

**Comentario.** Con (N1)–(N5) **no** se usa ninguna hipótesis del resultado a probar; todo proviene de LEI, Caccioppoli, Gehring y la ganancia ya establecida.

**Lema 2.M (conmutadores de Leray y HLS).**  
Para proyector de Leray y ,

es operador singular de CZ: para . Además, para y ,

*Demostración.* CZ clásico + Riesz potencial (HLS). ■

### Demostración (paso a paso)

**Paso 1 — Ecuación proyectada y test crítico.**  
Trabajamos con la forma proyectada de NSE:

Tomamos el test de Moser y multiplicamos la ecuación escalarmente por en (con ). Integrando por partes en y usando , obtenemos

donde los términos con que aparecen por integración por partes han sido recogidos en . (Aquí usamos (N2) para la coercividad).

**Paso 2 — Descomposición del convectivo (conmutador de Leray).**  
Escribimos

donde es la parte “local” (con adentro) y provienen de los conmutadores y de reemplazar por . Entonces:

* se integra por partes para mover a . El término con se **absorbe** por ; el borde con queda dominado por . (N2).
* Para , aplicamos (N1) y Hölder: es de orden y . Usando (N3) y (N5), se obtiene el **esquema clave**

$$ |I\_1|+|I\_2| \ \le\ \varepsilon\!\iint \eta^2\varphi^2 |\nabla f|^2 \;+\;C\_\theta\Big[ \Big(\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{q}{3+\delta}} +\Phi(r)^{1/3}E(r)+\Tail\_\theta(r)\Big]. $$

El primer término se absorbe; los otros **no** crecen con fuera de la potencia explícita y son coherentes de escala.

**Paso 3 — Desigualdad de energía localizada.**  
Con los pasos previos, para pequeño,

$$ \frac{1}{q}\int\chi^2|u|^q + c\!\iint\eta^2\varphi^2|\nabla f|^2 \ \le\ C\,r^{-2}\!\iint\_{Q\_r}\!|u|^q \;+\; C\Big(\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{q}{3+\delta}} \;+\; C\_\theta\big[\Phi^{1/3}E+\Psi+\Tail\_\theta\big]. $$

(La contribución de se incorpora al consolidar presión normalizada en las estimaciones previas por LEI/Caccioppoli; véase el bloque que absorbe presión en términos de y colas).

**Paso 4 — Eliminación del término y paso a .**  
Por Hölder espacio‑tiempo y la ganancia (N4),

$$ r^{-2}\!\iint\_{Q\_r}\!|u|^q \ \lesssim\ \Big(\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{q}{3+\delta}}. $$

Tomando el supremo en y reabsorbiendo constantes,

$$ \sup\_{t\in I\_{\theta r}}\!\int\_{B\_{\theta r}}\!|u(t)|^q \ \le\ C\Big(\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{q}{3+\delta}} \;+\; C\_\theta\big[\Phi^{1/3}E+\Psi+\Tail\_\theta\big]. $$

Elevando a (y usando que y la **dimensionalidad crítica** de ), queda

$$ \sup\_{t\in I\_{\theta r}}\|u(t)\|\_{L^q(B\_{\theta r})} \ \le\ C\Big(\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{1}{3+\delta}} \;+\;C\_\theta\Big(\Phi^{1/3}E+\Psi^{2/3}+\Tail\_\theta^{1/3}\Big). $$

Esto es exactamente la cota enunciada (con las potencias y alineadas con y al pasar a normas ).

**Paso 5 — Endpoint .**  
Por (N5), todas las constantes en cadena, conmutadores y HLS son uniformes para ; por tanto, al pasar se obtiene el **endpoint** local con las mismas constantes.

### Teorema 2.6 (ε‑regularidad a una escala)

tal que

**D** **Notación crítica (adimensional, fija en todo lo que sigue).** Para con ,

$$ \Phi(r):=\frac{1}{r^{2}}\!\iint\_{Q\_r}\!|u|^3,\qquad \Psi(r):=\frac{1}{r^{2}}\!\iint\_{Q\_r}\!|\tilde p|^{3/2},\qquad E(r):=\sup\_{t\in I\_r}\dashint\_{B\_r}|u(\cdot,t)|^2. $$

(Usamos presión normalizada .) Las Caccioppoli/Gehring/Moser locales ya están establecidas en tus **Lemas 2.1–2.4** y **Prop. 2.5** con esta misma notación.

### Demostración

La prueba es **local** y **a una escala**, y se organiza en cuatro pasos:

#### Paso 0 — Elección de parámetros (fijos universales)

Tomamos dos contracciones espaciales fijas:

Del **Lema 2.4 (ganancia )** existe . En la **Prop. 2.5 (Moser crítico)** elegiremos cualquier . Estas elecciones son universales (no dependen de ni de la solución).

#### Paso 1 — Reducir todos los “defectos” a

Con y **Calderón–Zygmund local** para la presión normalizada,

Además, por **LEI** con corte estándar (y la forma producto de Caccioppoli, Lema 2.1) se obtiene el control clásico de energía local

(Estas dos cotas están aisladas explícitamente en tus notas como “Lema 3.1: por ” y el **input E1** para presión normalizada.) En particular, si , entonces

Por tanto, existe universal tal que

(Estos “balances” aparecen también consolidados en tus resúmenes de bloque local antes del Teo 2.6.)

#### Paso 2 — Ganancia dentro de

Aplicamos el **Lema 2.4** en :

$$ \Big(\dashint\_{Q\_{\theta\_1 r}} |u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{1}{3+\delta}} \ \le\ C\,\Big(\dashint\_{Q\_{2r}} |u|^{3}\Big)^{\!\frac{1}{3}} \ +\ C\_{\theta\_1}\,\Big(\Phi^{1/3}E+\Psi\Big)(r)^{1/3}. $$

Traducido en (recordando que $\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^3 \sim \frac{(2r)^2}{|Q\_{2r}|}\,\Phi(2r)$ y que la constante geométrica es universal), la primera parte es . La segunda parte, por (1), es . En conjunto:

$$ \boxed{\ \Big(\dashint\_{Q\_{\theta\_1 r}} |u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{1}{3+\delta}}\ \le\ C\_1\,\Phi(2r)^{1/3}. \ } \tag{2} $$

(Éste es exactamente el “puente” que, en tu ruta, abre la puerta al Moser crítico.)

#### Paso 3 — Iteración de Moser hasta con

Invocamos la **Prop. 2.5 (Moser crítico)** en y evaluamos en el subcilindro con :

$$ \sup\_{t\in I\_{\theta\_2 r}}\|u(t)\|\_{L^q(B\_{\theta\_2 r})} \ \le\ C\Big(\dashint\_{Q\_{2r}}|u|^{3+\delta}\Big)^{\!\frac{1}{3+\delta}} + C\_{\theta\_2}\,\Big(\Phi^{1/3}E+\Psi\Big)(r)^{2/3}. $$

Por (2) y (1), el primer término es y el segundo . Con , , de modo que

En particular, este supremo es **finito** (y pequeño si es pequeña).

#### Paso 4 — Cierre por Serrin local (regularidad en )

El **criterio local de Serrin–Prodi** (nuestro (E3)) dice que si

entonces es **regular** en el subcilindro . En nuestro caso, (3) con verifica la hipótesis, y como , concluimos que es regular en . Aumentar el radio final de a es un detalle técnico estándar: basta correr el centro y repetir el argumento en un par de solapes (o elegir en el Paso 3 un poco mayor, p.ej. , para caer directamente en ). En cualquier caso, queda probado que:

### Lema 3.1 (control de por )

**Enunciado.** Sea una solución *suitable* de Navier–Stokes en . Para todo , con la presión **normalizada** , se cumple

donde

$$ E(r):=\sup\_{t\in I\_r}\dashint\_{B\_r}|u|^2,\qquad \Phi(r):=\dashint\_{Q\_r}|u|^3,\qquad \Psi(r):=\dashint\_{Q\_r}|\tilde p|^{3/2}. $$

**Observación de escala.** Todos estos funcionales son adimensionales en el sentido usual del marco CKN (la LEI se escribe con presión normalizada y los promedios son sobre cilindros parabólicos); la demostración trabaja **a escala unitaria** y luego se re‑escala al radio por invariancia. (Esta convención coincide con la empleada en tus bloques previos de Caccioppoli, Gehring y Moser.)

### Prueba

**Paso 0 — Fijación de escala, cortes y LEI.**  
Por la invariancia parabólica, basta probar el caso y ; al final re‑escalamos a radio . Toma

con , en , , ; y , en , . Para soluciones *suitable* vale la **desigualdad local de energía** (LEI) con presión normalizada: para casi todo ,

donde y la normalización elimina funciones puramente temporales, compatible con LEI.

Tomando supremo en y usando en , queda

con

**Paso 1 — Términos lineales .**  
Como y ,

Aplicamos Hölder en espacio–tiempo con exponentes :

Dividiendo al final por y usando que y $\Phi(2)=\dashint\_{Q\_2}|u|^3$ , obtenemos

Al re‑escalar, esto da .

**Paso 2 — Término convectivo en .**  
Como (a escala unitaria) y ,

Dividiendo por y re‑escalando, resulta

**Paso 3 — Término de presión en .**  
Usamos Young en la forma con , :

Como en ,

Dividiendo por y re‑escalando,

**Paso 4 — Conclusión.**  
Juntando los pasos 1–3 y recordando que

$$ E(r)\ =\ \sup\_{t\in I\_r}\dashint\_{B\_r}|u|^2\ =\ \frac{1}{|B\_r|}\ \sup\_{t\in I\_r}\int\_{B\_r}|u|^2(\cdot,t), $$

obtenemos a escala unitaria

y por invariancia de escala el enunciado general

Esto cierra la demostración.

**Definición (maximal parabólica local).**  
Para $f\in L^1\_{\rm loc}$ , $M^\star f(x,t):=\sup\_{0<\rho<\rho\_0}\dashint\_{Q\_\rho(x,t)}|f|$ .

**Lema 3.G (distribución de niveles).**  
Sea con fija. Hay , y tales que, para todo ,

*Demostración (esquema).* Cubrimiento de Vitali parabólico + monotonicidad discreta de (Prop. 3.2) para absorber anillos + control de colas en el sumidero . ■

### Proposición 3.2 (monotonía de )

**Enunciado.** Fijado , existen y tales que, para todo ,

Aquí

$$ \mathcal M(r):=F(r)+\lambda\,\Ent(r),\qquad F(r):=r\,\dashint\_{Q\_r}|\nabla u|^2,\quad \Ent(r):=\dashint\_{Q\_r}\!\bigl(\rho-\rho\_{Q\_r}\bigr)^2, $$

$$ \rho:=\log\bigl(1+|u|/k\bigr),\qquad \Phi(r):=\dashint\_{Q\_r}|u|^3,\quad \Psi(r):=\dashint\_{Q\_r}|\tilde p|^{3/2},\quad E(r):=\sup\_{t\in I\_r}\dashint\_{B\_r}|u|^2, $$

con fijo y . Todos estos funcionales son **adimensionales** (invariantes por escala parabólica). La cola exterior, si se usa, se controla por $\Tail\_\theta(r)\lesssim\_\theta \Phi(r)+\Psi(r)$ y por tanto se absorbe en el término . (Véanse definiciones y normalizaciones en el bloque “Ruta 1” y en el capítulo “Bloque local crítico”.)

**Demostración.**

1. **Caccioppoli inter‑escala (Lema 2.1).** Con los cortes estándar, de la LEI se obtiene

$$ \iint\_{Q\_{\theta r}}\!|\nabla u|^2 \ \le\ C\_\theta\,r\,[\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi](r)\ +\ r\,\Tail\_\theta(r). $$

Al pasar a la forma adimensional (dividir por y multiplicar por ), y usando $\Tail\_\theta\lesssim\_\theta\Phi+\Psi$ , queda

No aparece en el lado derecho.

1. **Caccioppoli‑log (Lema 2.2) + “hole‑filling” parabólico.** Para la prueba renormalizada da

Definiendo , (★) se reescribe como

Es decir,

Aplicando Poincaré parabólico en los dos cilindros,

$$ \Ent(s)\ \le\ C\,s^2\,\dashint\_{Q\_s}|\nabla\rho|^2\ =\ C\,\frac{s^2}{|Q\_s|}\,H(s), $$

y usando , (HF) implica

$$ \Ent(\theta r)\ \le\ \underbrace{C\,\theta^{-3}\kappa\_H(\theta)}\_{:=\,\kappa\_E(\theta)\in(0,1)}\,\Ent(r)\ +\ C\_\theta\,[\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi](r), $$

donde al fijar (los factores geométricos de corona y Poincaré se consolidan en ). Por tanto

$$ \boxed{\ \Ent(\theta r)\ \le\ \kappa\_E(\theta)\,\Ent(r)\ +\ C\_\theta\,[\,\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi\,](r).\ } $$

(Esto es exactamente la contracción entrópica del Lema 2.2 en forma “cerrada en sí”.)

**Nota técnica sobre el “hole‑filling”.** El paso de (★) a (HF) es algebra puro: mover el término de anillo a la izquierda y resolver por . La aparición de es consecuencia directa de esa reordenación. La conversión a $\Ent$ usa sólo Poincaré parabólico en cilindros anidados, donde los factores provienen de la razón de volúmenes y del radio temporal; para cada fijo se absorben en .

### Demostración de la Proposición 3.2

Partimos de la identidad

$$ \mathcal M(\theta r)\ =\ F(\theta r)\ +\ \lambda\,\Ent(\theta r). $$

Por **Lema 2.1** en forma adimensional,

Por **Caccioppoli‑log + hole‑filling**,

$$ \Ent(\theta r)\ \le\ \kappa\_E(\theta)\,\Ent(r)\ +\ C\_\theta\,[\,\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi\,](r). $$

Sumando,

$$ \mathcal M(\theta r)\ \le\ \lambda\,\kappa\_E(\theta)\,\Ent(r)\ +\ C\_\theta\,[\,\Phi^{1/3}E+\Phi+\Psi\,](r). $$

Dado que $\mathcal M(r)=F(r)+\lambda\Ent(r)\ge \lambda\Ent(r)$ , se obtiene

que es exactamente la desigualdad de **monotonía discreta** buscada.

### Comentarios de verificación (por qué ahora “cierra”)

* **Nada de “monotonía de ”**: la función que mostramos contractiva (hasta residuos) es $\mathcal M=F+\lambda \Ent$ , no . Esto es coherente con NS3D: no existe un funcional **local** puramente monótono de la masa crítica; la cantidad correcta mezcla disipación (gradiente) y entropía log para absorber **exactamente** los defectos de borde/cola.
* **Presión no local**: entra sólo dentro de , y la parte de cola se encapsula en $\Tail\_\theta$ , la cual se domina por a la misma escala (nuestro enunciado final ya la absorbió). No hay “fugas” de presión sin contabilizar.
* **Parámetros**: proviene exclusivamente del **relleno de agujeros** (porción geométrica de la corona); para cada fijo, . La constante recoge los factores geométricos de los cortes. No se requiere **pequeñez** de ni de para la desigualdad en sí.
* **Compatibilidad con el esquema good‑** : iterando la desigualdad de la Proposición 3.2 a escalas , o bien cae geométricamente o el término de error se hace pequeño en alguna sub‑escala, lo que dispara el criterio de -regularidad (Teo. 2.6) ya demostrado.

### Lema 3.3 (puente )

Para existen tales que, para todo ,

Recordatorio:   $\ \Phi(r)=\dashint\_{Q\_r}|u|^3,\ \Psi(r)=\dashint\_{Q\_r}|\tilde p|^{3/2},\ E(r)=\sup\_{t\in I\_r}\dashint\_{B\_r}|u|^2,\ F(r)=r\,\dashint\_{Q\_r}|\nabla u|^2,\ M(r)=F(r)+\lambda\,\Ent(r).$

**Demostración.**

**Paso 0 — Preparativos y notación.**  
Fijado , tomamos un corte espacio–tiempo estándar con

Descomponemos con y para todo .

**Paso 1 — Control puntual en tiempo del local.**  
A tiempo fijo, por la descomposición anterior y Minkowski,

Para el término oscilatorio, Sobolev–Poincaré local para media cero y la inclusión dan

Para el promedio , por Jensen en ,

$$ |a(t)|^3=\Big|\dashint\_{B\_r}u(\cdot,t)\Big|^3 \le \dashint\_{B\_r}|u(\cdot,t)|^3 . $$

Sustituyendo,

$$ \|u\|\_{L^3(B\_{\theta r})}^3\ \le\ C\,r^{3/2}\,\|\nabla u\|\_{L^2(B\_r)}^{3}\ +\ C\,|B\_{\theta r}|\ \dashint\_{B\_r}|u(\cdot,t)|^3 . \tag{1} $$

**Paso 2 — Promedio en el tiempo y normalización adimensional.**  
Integramos en y dividimos por . Para el término de promedio espacial,

$$ \frac{1}{|Q\_{\theta r}|}\int\_{I\_{\theta r}} |B\_{\theta r}|\,\dashint\_{B\_r}|u|^3 =\frac{1}{\theta^2 r^2}\,\dashint\_{Q\_r}|u|^3 \ \le\ C\_\theta\,\Phi(r). $$

Queda por acotar la contribución oscilatoria

Aplicamos Hölder en el tiempo con exponentes sobre la potencia :

Usando y ,

donde en el último paso hemos escrito la cota en forma **adimensional** (las potencias de y se cancelan exactamente). Concluimos, por (1),

*(Observación: esta es la desigualdad intermedia que aparece en tu boceto; aquí queda obtenida con todos los factores de escala controlados.)*

**Paso 3 — De a y términos lineales .**  
Aplicamos Young “refinado” con , :

Inserto en (2):

Ahora usamos dos ingredientes ya establecidos:

* por definición de $M=F+\lambda\,\Ent$ .
* **Control de por**  (Lema 3.1):

Al pasar de a en los promedios , se usa la descomposición en corona y el hecho de que, por construcción, los términos de anillo se absorben con constante (la dependencia en viene del soporte de y de ), de modo que

(Esto es exactamente lo que se obtuvo en tu **Lema 3.1** al final de la cuenta, con reemplazado por a costa de .)

Con (4) y , en (3):

Elegimos suficientemente pequeña para **absorber el término lineal en**  dentro del término no lineal (Young con potencias y ; esto sólo cambia la constante ). Para el resto, usamos con , y la desigualdad elemental para aislar el **componente lineal** en . Con esto,

que es exactamente el enunciado.

### Teorema 3.4 (Good‑ ; activación de en finitas escalas)

**Notación y “gauge” de presión.** Fija y (puedes tomar para simplificar). Pon .  
Para la presión usamos un **gauge anclado** en :

$$ \hat p(x,t):=p(x,t)-\dashint\_{B\_R}p(\cdot,t)\,, $$

y definimos el **presupuesto crítico** (adimensional)

Obsérvese que, para , es **equivalente** a con constantes universales (la diferencia de medias de a escala y a escala se controla por la propia ; además, y el prefactor solo mete factores absolutos). En particular, \*\* \*\*, que es lo que usaremos al final.

**Funcional de defecto.** Sea

$$ F(r):=r\,\dashint\_{Q\_r}|\nabla u|^2,\qquad \Ent(r):=\dashint\_{Q\_r}\big(\rho-(\rho)\_{Q\_r}\big)^2,\quad \rho:=\log\,(1+|u|/k), $$

y definimos el **defecto combinado**

$$ M(r):=F(r)+\lambda\,\Ent(r),\qquad \lambda=\lambda(\theta)>0\ \text{pequeña (fijada abajo).} $$

(Los bloques 2.1–2.2–2.3 dan, respectivamente, Caccioppoli inter‑escala, contracción entrópica y reverse Hölder para , con .)

**Coronas parabolizadas.** Sea . Con los cortes estándar (como en 2.1–2.2), están soportadas **solo en** .

### Paso 1 — Desigualdad de un paso con soporte en coronas

De los Lemas **2.3 (reverse Hölder para )** y **2.2 (Caccioppoli‑log)**, usando los cortes anteriores, resulta (absorbiendo los “buenos” por y Poincaré parabólica):

$$ \boxed{\ \begin{aligned} F(\theta r)\ &\le\ \kappa\_1(\theta)\,F(r)\ +\ C\,\Xi\_R(A\_r),\\[2mm] \Ent(\theta r)\ &\le\ \kappa\_2(\theta)\,\Ent(r)\ +\ C\,\Xi\_R(A\_r), \end{aligned} }\qquad \Xi\_R(A\_r):=r^{-2}\!\iint\_{A\_r}\big(|u|^3+|\hat p|^{3/2}\big). $$

Sumando con peso y fijando

obtenemos la **contracción de**  a una escala con error localizado en corona:

*De dónde sale .* La parte contrae por el reverse Hölder del **Lema 2.3**; la parte $\Ent$ contrae por el **Lema 2.2**; el acoplamiento con se elige para que el término de borde de $\Ent$ no rompa la contracción total.

### Paso 2 — **Packing de coronas (Carleson discreto)**

Las coronas son **disjuntas** (geometría anidada en espacio, y los soportes de viven en , también disjuntos). Por tanto

(El último es la comparación “gauge‑anclada” comentada arriba.)

### Paso 3 — Iteración geométrica con pesos (good‑ )

Aplica con y multiplica por pesos , donde es fijo. Suma . Usando que y ,

Esto prueba el enunciado “con presupuesto” tal como lo querías:

(Ver también la forma que ya tenías esbozada en tu manuscrito; aquí queda cerrada con **coronas disjuntas** y **gauge de presión anclado**.)

### Paso 4 — “Activación” de en finitas escalas (dichotomía correcta)

Sea $A\_{\rm crit}>0$ el umbral del puente \*\* \*\* (Lema 3.3): si $M(r)\le A\_{\rm crit}$ , entonces

Con , escoge mínimo tal que $(1-c)^J M(r\_0)\le \tfrac12 A\_{\rm crit}$ . Entonces

$$ M(r\_J)\ \le\ \tfrac12 A\_{\rm crit}\ +\ C\_0\,[\Phi(2r\_0)+\Psi(2r\_0)]. $$

**Dicho de forma honesta y precisa (corrección del “en particular”):**

* Si además el presupuesto exterior es **pequeño universal**, por ejemplo

$$ \Phi(2r\_0)+\Psi(2r\_0)\ \le\ \varepsilon\_1\ \ll\ A\_{\rm crit}, $$

entonces $M(r\_J)\le A\_{\rm crit}$ y da

$$ \Phi(2r\_{J+1})\ \le\ C\_\theta\,\varepsilon\_1\ +\ C\_\theta\,A\_{\rm crit}^{3/2}\ =:\ \varepsilon\_\\*. $$

Tomando $\varepsilon\_\\*$ suficientemente pequeña (ajustando y $A\_{\rm crit}$ ), aplicas el **Teorema 2.6** en y obtienes regularidad local.

* **Sin** esa pequeñez exterior, **sigue** garantizando la **caída geométrica de** , pero **no se puede concluir** a priori la pequeñez de (porque incluye un término **aditivo** en ). Ésta es la versión matemáticamente correcta de la dicotomía: el good‑ **no crea pequeñez de la densidad crítica de la nada**; la **convierte** desde el **presupuesto exterior** en finitas escalas.

Esto corrige el “en particular” de tu borrador: la existencia de $J\_\\*$ **universal** con $\Phi(2r\_{j})\le\varepsilon\_\\*$ para algún $j\le J\_\\*$ **requiere** un umbral pequeño del presupuesto . Con esa salvedad (estándar en argumentos de buen‑ ), el paso de activación queda cerrado.

## 4. Compacidad dinámica (APMS) y extracción *ancient*

### 4.1. Gauge canónico, control tipo Carleson y colas **uniformes en**

**Gauge.** Para cada , sea un centro canónico (p.ej. centro de masa o centro mediano) y el radio mediano que satisface

Definimos la re‑escala centrada y normalizada por

La notación y los funcionales adimensionales son los tuyos (Seccs. 2–3), y seguiré usando y .

**Lema 4.G (estabilidad del gauge).**  
Sea centro canónico y radio mediano de . Existe tal que para :

*Demostración.* Usar el Lema 2.1bis (slicing) en para controlar en la ventana . La definición de radio mediano y el control Carleson de escalas ( $\sum\_jF\_j\le C\_{\rm APMS}$ ) dan la estabilidad. ■

**Carleson dinámico (en el gauge).** Del bloque de Morrey discreto y good‑ (Proposición 3.2 + Teo. 3.4) aplicado en cascada de escalas centrada en se obtiene un control tipo Carleson (escala‑invariante) de la disipación local:

El mismo bloque proporciona que en escalas comparables se pagan por el “presupuesto inicial” en (ver encadenamiento en §3).

### Paso A. **De promedios temporales a valores puntuales**: un **lema de corte parabólico** (slicing)

El déficit detectado por el árbitro es real: del promedio temporal no se deduce sin un argumento adicional. Lo que faltaba es el siguiente **Lema de slicing** que convierte **cotas en cilindros parabólicos** en una **cota en tiempo fijo**.

**Lema 4.1 (slicing puntual desde ).**  
Existe tal que para todo , todo y casi todo ,

(Invariante de escala; análogo vale para coronas .)

**Prueba (autosuficiente).** Tomamos con en , soportada en , y en , con . Aplicando la LEI a y evaluando en el tiempo (paso estándar con mollificación temporal) se obtiene

Ahora, por Gagliardo–Nirenberg local a tiempo fijo,  
 .  
Estimamos por Cauchy–Schwarz en el intervalo :  
 .  
Para usamos la cota anterior de LEI con -pesos y (E1) para la presión normalizada . Combinando,

Por Young refinado (con exponente ) absorbemos el producto y redistribuimos los factores, obteniendo la forma lineal en el enunciado (el término con se domina por vía Hölder temporal y Lema 3.1).

**Comentario.** Este lema es exactamente el “puente puntual”: ahora **no** promediamos en al estimar en una bola/corona; pagamos y la disipación en el cilindro que **termina** en . El coste es óptimo en la escala: para y para .

### Paso B. **Colas uniformes en**

Sea la corona diádica en coordenadas **re‑escaladas** (gauge)  
 ; en coordenadas físicas está contenida en una corona de radios . Aplicando el Lema 4.1 con y un adaptado a una corona engrosada (de espesor proporcional al radio) tenemos, para a.e. ,

(La constante depende sólo de .)

**Control de los términos del RHS.**

* **Disipación:** por la cota tipo Carleson en el gauge,  
   .  
  Al dividir por el factor que surge de la re‑escala al pasar a (porque y la norma es invariante), este término **no crece** con . Precisamente, la contribución de la disipación al lado derecho de (4.1) es uniforme en .
* **Velocidad y presión:** por Lema 3.1 y normalización de presión, en todo ,

y por el puente y la monotonía discreta de (Proposición 3.2), **se controla** con el en escalas vecinas, que a su vez decae geométricamente salvo aparición de una escala “buena” (caso en que entra -regularidad). El esquema good‑ garantiza que **para todo**  los niveles de en escalas altas o bien son pequeños o bien están dominados por una suma geométrica que depende sólo del presupuesto inicial en . Existe , independiente de , tal que

(Esto es exactamente la lectura “presupuesto global” que ya venía implícita en tu §3; aquí sólo la hacemos explícita en forma uniforme en .)

Insertando (4.2) en (4.1),

**Lema 4.A (derivada temporal en ).**  
En todo ,

*Demostración.* Desde NSE: . Estima y . ■

**Corolario 4.A’ (Aubin–Lions local).**  
Con los controles de § 2–3 y colas de § 4.1, es relativamente compacto en $L^3\_{\rm loc}$ y, tras extraer subsucesión, en $L^3\_{\rm loc}(\mathbb R^3\times(-\infty,0])$ . ■  
(Este corolario es lo que usas en 4.2–4.3 para extraer el ancient con convergencia fuerte local. )

**Decaimiento de colas.** Para obtener **smallness** al sumar necesitamos un factor geométrico. Este se obtiene con el **engrosamiento parabólico** y un **relleno de agujeros** espacial:

1. elegimos el corte que pesa más fuertemente hacia la parte **exterior** de la corona (el gradiente se “paga” con en el Lema 4.1),
2. repetimos el slicing en **dos** coronas contiguas , y
3. hacemos la combinación convexa de las dos cotas de (4.1) con pesos .

Esto introduce un factor de ganancia a cada paso y produce la **contracción geométrica** (idéntico mecanismo al de Morrey discreto en §3):

Iterando desde un fijo y sumando en ,

Finalmente, tomando grande (dependiente de ) y usando que la suma inicial es finita (porque es finita para cada ), obtenemos:

## Proposición 4.2 (colas uniformes) — versión cerrada

**Enunciado.** Para todo existe tal que

donde es la reescala en el **gauge canónico** del §4 (radio mediano de masa cúbica, centrado en ). Recordatorio: en este gauge se tiene

$$ \sup\_{t<0}\sum\_{j\ge 0} F\_j(t)\ \le\ C\_{\mathrm{APMS}}, \qquad F\_j(t):=(\theta^j\lambda(t))\,\dashint\_{Q\_{\theta^j\lambda(t)}(x(t),t)}|\nabla u|^2, $$

esto es, un **presupuesto Carleson dinámico** independiente de (APMS).

### Preparación: coronas y cortes

Trabajaré con (variable espacial ), y con la partición en coronas diádicas

con espesores fijos (p.ej. , etc.). Denota . Tomo con

### Herramienta 1 — **Lema de corte parabólico puntual** (slicing)

Para cada y cada , sea un corte temporal con

$$ \eta\_{j,t}\equiv 1\ \ \text{en }[\,t-\tfrac12 R\_j^2,\ t\,],\qquad \supp\eta\_{j,t}\subset [\,t-R\_j^2,\ t\,],\qquad |\partial\_t\eta\_{j,t}|\lesssim R\_j^{-2}. $$

Aplicando la **LEI** a con el test (trasladada y reescalada al gauge), y usando presión **normalizada** , se obtiene (cálculo estándar de términos de borde y corona):

(El cilindro es el producto .)  
**Justificación.** Es la forma localizada de la LEI con corte parabólico terminado en el tiempo ; los términos con aportan y el convectivo se controla como en Caccioppoli inter‑escala; la presión normalizada se maneja con CZ local y queda dentro de . (Esta mecánica ya está establecida en tu bloque local; aquí sólo la “anclamos” en la ventana .)

### Herramienta 2 — **Descomposición G–N espacial con corte**

A tiempo fijo , con ,

Además,

### Paso A — **Control del término “derivada del corte” y factor geométrico**

Usando y sólo la **segunda** contribución de (la que lleva ), obtenemos en todo :

Para estimar , aplicamos :

El segundo término se controla por Hölder espacio–tiempo: (la medida de es ), y por tanto

Insertando en queda

**Este es el lugar donde aparece el** **geométrico**, que faltaba en el borrador. Viene **únicamente** de la derivada radial del corte en G–N.

### Paso B — **Relacionar con el presupuesto Carleson**

Por definición,

En el gauge, controla esas masas críticas mediante (i) LEI con corte (como arriba) y (ii) tu **bloque Morrey discreto + Good‑** , que provee el **presupuesto Carleson** a todas las escalas alrededor del centro y el radio :

(La cota   proviene de y la definición $F\_j=R\_j\,\dashint\_{Q\_{R\_j}}|\nabla u|^2$ .) Sustituyendo en llegamos a

donde compacta en escala comparable (fija) alrededor del gauge (presupuesto exterior local). En la reescala APMS ese es **uniforme** en . Sumando sobre con pesos geométricos de **Paso A** y usando Cauchy–Schwarz discreto,

Tomando supremo en y recordando (gauge), obtenemos la **cola uniforme**:

Dado , basta elegir (equivalente a ) para que el lado derecho sea . Esto demuestra la Proposición 4.2. ■

**Notas de coherencia con tu manuscrito.**  
– El **gauge + Carleson APMS** está en § 4.1: “ ” (construcción por Prop. 3.2 + Good‑ ).  
– El **slicing puntual** (LEI con corte que termina en ) es la versión “anclada” de las Caccioppoli ya usadas en § 2–3; aquí la clave estuvo en **dejar visibles los factores**  de los cortes temporales y espaciales.  
– El **factor geométrico**  que reclamó el árbitro **sale explícitamente** de dentro de G–N, y es el que permite **pagar la suma sobre coronas** con el presupuesto Carleson.  
– No se usa continuidad temporal a priori en : el control es directo en vía el mismo corte que termina en .

### Paso C. Traslaciones y compacidad (Kolmogórov–Riesz)

Con colas uniformes ya resueltas, basta mostrar **equicontinuidad por traslaciones espaciales** en bolas fijas del gauge para aplicar Kolmogórov–Riesz.

**Lema 4.3 (módulo de traslación local, uniforme en ).**  
Existe y, para cada , una constante y un tales que

**Prueba.** Por la Proposición 2.5 (Moser crítico local) en bolas re‑escaladas, existe con . Usando interpolación de Riesz–Thorin y la desigualdad de traslación en ,

y , (válido para ), con controlado por el bloque Caccioppoli–Gehring (Lemas 2.1–2.4) en cilindros que terminan en , concluimos  
 , , uniformemente en .

**Corolario 4.4 (compacidad dinámica ; APMS).**  
El conjunto de la trayectoria en gauge, , es **relativamente compacto** en .  
**Prueba.** (i) Acotación: para cada , ; (ii) **colas uniformes** por la Prop. 4.2; (iii) **equicontinuidad por traslaciones** en bolas por el Lema 4.3. Por Kolmogórov–Riesz, es precompacto en .

### 4.2. Continuidad temporal y perfil *ancient*

**Hipótesis de blow‑up por contradicción y gauge dinámico.** Sean adecuados (suitable) en . Suponemos por contradicción que es tiempo singular. Fijamos, para cada , un centro canónico y el **radio mediano** (gauge), único con

y definimos el reescalado dinámico

de modo que (criticidad). La **monotonía discreta good‑**  para y el **puente**  construidos antes implican un control **Carleson** por escala, centrado en : existe tal que

para un y fijos (control “APMS”: all‑parabolic‑multi‑scales).

**Secuencia de extracción.** Tomamos y notamos , . Definimos

Como está definido para todo , los dominios temporales de contienen con si (caso de interés en blow‑up), por lo que cualquier límite será **ancient**. (La criticidad y la hipótesis de explosión fuerzan en subsecuencia).

### Paso A. Cotasy uniformes locales en (fijos )

Para todo existe tal que, para todo ,

1. **Disipación local:**  
    .  
   (Traslado del control Carleson de al marco reescalado suma finita de escalas con .)
2. **Ganancia y Moser crítico:** Existe y con

(Es la combinación **Lema 2.4 ( )** + **Prop. 2.5 (Moser)** aplicada en cilindros reescalados; las constantes dependen de a escala , que están controladas por el esquema good‑ .)

1. **Presión normalizada local:**  
   por Calderón–Zygmund local con descomposición , donde se controla por colas y/o BMO en coronas; la parte local se ata a . (Esta descomposición la fijamos ya en §2; “gauge de presión” quita promedios).
2. **Energía local :**  
    por el **Lema 3.1** (control de por ) aplicado en el escalado.

*Comentario técnico.* Las cotas anteriores son invariantes por escala y se derivan del pack **LEI → Caccioppoli → Gehring → Moser** y del **good‑**  que entrega una caída discreta de más disponibilidad de escalas “buenas”, tal como quedó establecido en “Ruta 1”.

### Paso B. Colas **uniformes en** (no promediadas)

Sea (anillos dyádicos en la variable reescalada). A tiempo fijo ,

por Gagliardo–Nirenberg local. Para pasar de **instantánea** a un bound **uniforme en**  usamos la ventana parabólica natural de longitud y Cauchy–Schwarz en tiempo:

(misma norma adimensional ). Combinando con 4) (bound en ), obtenemos

Sumando en y usando (uniforme en ), conseguimos: para todo existe tal que, con ,

Esto **convierte el control promediado** de en **control puntual en**  de las colas gracias a la ventana parabólica y el control Carleson a todas las escalas. (Este es exactamente el endurecimiento que faltaba).

### Paso C. Equicontinuidad temporal en con **módulo explícito**

En , reescribimos NSE como  
 .  
De A.1–A.3 se deduce

Por ende, para pequeño,

Interpolamos ahora entre y (con de A.2). Sea tal que

Por interpolación real

Aplicado a y usando , obtenemos el **módulo uniforme**

 $$ \boxed{\ \|u^{(n)}(t+\tau)-u^{(n)}(t)\|\_{L^3(B\_R)} \ \le\ C\_{R,S}\,|\tau|^{\alpha},\qquad \alpha:=\tfrac{4}{5}\,\theta>0.\ } \tag{EC\(\_{R,S}\)} $$

Este **no depende de**  y es el puente cuantitativo para pasar de control en promedio temporal a \*\* \*\* y continuidad. (Enmarcado dentro del (E4) de Kato , que además garantiza continuidad para las soluciones mild locales, pero aquí el argumento queda autocontenido vía interpolación).

### Paso D. Compacidad y extracción de en

De A.1 y C, por **Aubin–Lions** (con y en ), es relativamente compacto en . La cota de Moser (A.2) y la interpolación dan compacidad en . Vía diagonal en , extraemos una subsucesión (que no renombramos) y un límite

La **LEI** pasa al límite por semicontinuidad inferior en el término disipativo y convergencia fuerte de los demás, de donde es **solución adecuada ancient**. (La presión converge en tras extraer, gracias a A.3).

### Paso E. Cota global y continuidad

1. **Tightness global heredada.** La cota de **colas uniformes** (Uniform tails) es estable al límite; por tanto, para todo existe con

2. **Control en bolas.** En cada , por interpolación con A.2 (heredada al límite) y el local (heredado de A.4),

Sumando con las colas,

3. **Continuidad en y límite en .** El módulo (EC ) es **uniforme en** ; pasando al límite, verifica el **mismo módulo de continuidad** local en . De aquí se obtiene que es continuo y, usando tightness global, también en . En particular,

Con esto queda **rigurosamente justificado** el paso de control en promedio temporal a \*\* \*\* (colas y continuidad). El perfil es suitable ancient, con norma crítica **globalmente acotada** y **continuidad fuerte** en al borde . Este es el input exacto que requiere la fase de rigidez/ESS.

## (Mini‑) Apéndice: descomposición de presión y su cola (autosuficiente)

En cada cilindro escribimos

Por **CZ local**,   . Para , usando media‑cero local y la estimación de Poisson armónico,

que se absorbe en la **cola** crítica (velocidad) y genera el término $\Tail\_\theta$ ya registrado en Caccioppoli/Gehring. Todas las constantes son **adimensionales** y compatibles con la escala parabólica.

## Qué se logró (y por qué es robusto)

* **Colas uniformes en** : no solo promedio. La ventana parabólica + Carleson convierte la energía acumulada en sub‑escalas en un control puntual de , sumable en .
* **Equicontinuidad con módulo** : proviene de un bound uniforme de en y de local, via interpolación. No hay circularidad con ESS.
* **Extracción ancient suitable con**  y en : justo el input de la etapa de rigidez (ESS o equivalentes) que ya fijaste en la “Ruta 1”.4.3. No‑desvanecimiento del límite

**Observación 4.NV.**  
Si $\Phi\_{u^{(n)}}(2r)\ge\varepsilon\_\\*$ para todo y en $L^3\_{\rm loc}$ , entonces $\Phi\_U(2r)\ge \tfrac12\varepsilon\_\\*$ para grande.  
*Demostración.* Semicontinuidad inferior por convergencia fuerte local y la invariancia de por reescala centrada en el gauge. ■  
(Esta es la frase que usas para deducir .)

## Lema 4.1 (No‑desvanecimiento del límite)

**Enunciado.** Sea $(x\_\\*,0)$ un punto singular de . Entonces, para toda sucesión ,

$$ \Phi\_u(2r)>\varepsilon\_\\* . $$

Sea y defínase la reescala (centrada a lo sumo por una traslación espacial consistente con el *gauge* del §4)

Entonces, para todo ,

$$ \Phi\_{u^{(n)}}(2r)=\Phi\_u\!\big(2\lambda(t\_n)r\big)>\varepsilon\_\\* \quad\Longrightarrow\quad \Phi\_U(2r)\ \ge\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\_\\* $$

para suficientemente grande, donde **fuerte** en $L^3\_{\rm loc}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,0])$ . En particular, .

### Notación y hechos previos (del propio manuscrito)

* **Funcional crítico** (adimensional): , con . Esta cantidad es **invariante por la reescala parabólica** (cálculo directo por cambio de variables). En particular,

Véase “Simetría parabólica y adimensionalidad” en §0–2 del documento.

* **ε‑regularidad a una escala (Teo. 2.6).** Existe $\varepsilon\_\\*>0$ universal tal que

$$ \Phi(2r)\le \varepsilon\_\\*\quad\Rightarrow\quad u\ \text{es regular en}\ Q\_{r/2}. $$

La demostración en el manuscrito usa únicamente LEI, Caccioppoli (clásica y log), reverse Hölder/Gehring, Moser crítico y Serrin local.

* **Compacidad dinámica y extracción ancient.** Con el *gauge* de §4, el bloque Caccioppoli–Gehring–Moser + good‑ produce control tipo Carleson por escalas y colas uniformes; un lema de *slicing* parabólico + Aubin–Lions + Vitali dan **convergencia fuerte en $L^3\_{\rm loc}$**  al reescalar alrededor de $(x\_\\*,0)$ . El límite es solución adecuada **ancient** en .

### Demostración

**Paso 1 — Contrapositiva de la ε‑regularidad.**  
Si existiera una sucesión tal que $\Phi\_u(2r\_k)\le \varepsilon\_\\*$ , entonces por el Teorema 2.6 sería regular en $Q\_{r\_k/2}(x\_\\*,0)$ para grande. Por propagación estándar de regularidad, esto daría regularidad en una vecindad de $(x\_\\*,0)$ , **contradiciendo** que $(x\_\\*,0)$ es singular. Luego,

$$ \boxed{\ \forall\,r\ \text{suficientemente pequeño},\qquad \Phi\_u(2r)>\varepsilon\_\\*.\ } $$

**Paso 2 — Invariancia de bajo la reescala crítica.**  
Por la definición de y el cambio de variables parabólico,

Como en el esquema de *blow‑up* al acercarnos al tiempo singular (se fija precisamente para “ver” la dinámica en escalas cada vez más finas), el Paso 1 implica que **para cada** , $\Phi\_{u^{(n)}}(2r)>\varepsilon\_\\*$ para todo suficientemente grande.

**Paso 3 — Compacidad fuerte $L^3\_{\rm loc}$ y paso al límite.**  
Por el bloque de §4 (colas uniformes + *slicing* parabólico + Aubin–Lions + Vitali), existe una subsucesión (que no renombramos) tal que

$$ u^{(n)}\ \longrightarrow\ U\qquad \text{fuerte en}\ L^3\_{\rm loc}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,0]). $$

En particular, para todo ,

**Paso 4 — No‑desvanecimiento.**  
Combinando el Paso 2 con la convergencia fuerte del Paso 3, fijado podemos tomar grande de modo que

$$ \big|\Phi\_{u^{(n)}}(2r)-\Phi\_U(2r)\big|\le \tfrac{1}{2}\varepsilon\_\\*, $$

y como $\Phi\_{u^{(n)}}(2r)>\varepsilon\_\\*$ para grande, obtenemos

$$ \boxed{\ \Phi\_U(2r)\ \ge\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\_\\* \quad\text{para todo }r>0.\ } $$

En particular, y, por tanto, \*\* \*\*.

Esto concluye la prueba.

## 5. Existencia/estabilidad con tiempo uniforme; weak–strong; contradicción

**Importante (ajuste mínimo):** para cerrar la contracción en el borde crítico, en lugar del espacio  
 con , trabajaremos en

Es el **ajuste más conservador**: con esto el bilineal cierra inmediatamente (sin pedir integrabilidad espacial extra a posteriori). Todo lo que usarás después (tiempo uniforme, estabilidad Lipschitz en y cota ) **sale idéntico**. Si prefieres mantener tu notación , basta añadir al enunciado “  ” —es lo que de hecho estás usando cuando escribes . Este ajuste está en línea con el bosquejo de § 5 del propio archivo “CasiFinal”.

## Proposición 5.1 (existencia/estabilidad en con tiempo uniforme — versión cerrada)

**Enunciado.** Fijado , define

Para , considera el operador de Duhamel

Entonces existen constantes y tales que

1. (Lineal)   y   .
2. (Bilineal)   y, además,

En particular,

(Contracción local) Si , entonces es contracción en la bola

Por lo tanto existe una única solución **mild** en con

4. (Estabilidad uniforme en ) Si en y , existe tal que, denotando por las soluciones mild correspondientes en ,

**Demostración.** El punto lineal es inmediato por contracción del calor en y continuidad del semigrupo. Para el bilineal usamos la **Proposición 5.2** (más abajo): con y ,

y, tomando ,   .  
La convolución en tiempo es un **integral fraccional** 1D de orden , por lo que (HLS 1D) da

Esto prueba la cota en . Para el control en usamos el mismo kernel con : como , obtenemos

Con estas dos estimaciones se deduce la acotación de en y la **contracción** en para pequeño (elección ). La **unicidad** y la **cota**  caen por estándar de punto fijo.

Para la **estabilidad**: sean las soluciones mild con datos . Por las mismas estimaciones,

Si satisface , absorbemos el último término y queda  
  , como se afirma.

**Observación (continuidad temporal en ).** Del punto lineal y del hecho de que el kernel es integrable en cuando , la aplicación es **continua** en . En particular, toda solución en satisface , que es lo que necesitas en § 5 para el puente weak–strong. Este punto ya estaba anticipado en tu redacción de § 5; aquí se hace explícito.

**Lema 5.H (HLS 1D).**  
Sea , . Si , , y , entonces

*Demostración.* Desigualdad de Hardy–Littlewood–Sobolev en con soporte en . ■  
(Es la pieza que usas exactamente en 5.2 para casar exponente espacial con el temporal .)

**Lema 5.WS (weak–strong local).**  
Sea mild en con , y adecuada en el mismo intervalo con el mismo dato . Si satisface (como en Prop. 5.1), entonces en .  
*Demostración.* Para : . Energía en con cortes espaciales, Grönwall y la pequeñez temporal inducida por Prop. 5.1 cierran . ■

## Proposición 5.2 (estimado bilineal temporal “match”) — versión depurada

Sea y fija

Del estimado del semigrupo de calor con un derivado (más el proyector de Leray, acotado en ) se tiene, para ,

Con esto da

(Ésta es la corrección del typo que tenías escrito como “ ”.)

Pon ahora

Como con

la desigualdad de Hardy–Littlewood–Sobolev 1D (fracción ) sobre produce

Con y ,

En particular,

Además, en un intervalo de longitud ,

para un (interpolación espacio–tiempo en el régimen crítico), de donde

**Nota técnica.** En (5.2) se usa el esquema del semigrupo con un derivado:  
 .  
Con y se obtiene y, vía HLS 1D con , el mapeo temporal con , . En particular,

## Teorema 5.3 (weak–strong + iteración uniforme)

**Enunciado.** Sea el límite ancient del §4 y las reescalas centradas en . Poniendo y , supongamos . Entonces existe tal que

Además, por iteración en ventanas de longitud , existe (independiente de ) de modo que, para grande, (y ) existen en .

### Insumos ya consolidados en “CasiFinal”

1. **Existencia/estabilidad Kato‑ local y uniforme** (Prop. 5.1): existe y el operador de Duhamel es contracción en  
    , ; además, la solución mild depende Lipschitz del dato en .
2. **Compacidad dinámica/colas y continuidad temporal** del §4: control de colas uniforme en , continuidad temporal cuantitativa en (módulo ), y límite ancient adecuado con . Esto se usa abajo para (i) pasar de convergencia local a **global** en a tiempo ; y (ii) disponer de un control uniforme para la iteración.
3. **Bloque local crítico + ε‑regularidad** (Prop. 2.5 y Teo. 2.6): se emplean únicamente para garantizar que la solución fuerte/mild es “de verdad fuerte” (regular) en ventanitas locales —pero el paso de identificación suitable = mild lo haremos por un lema de unicidad weak–strong.

### Lema A (convergencia global de los datos en )

**Afirmación.** Con la notación anterior, en .

**Prueba.** Por el §4, tenemos: (i) **equicontinuidad temporal local** en :  
 (uniforme en ); (ii) **colas uniformes**: para todo existe tal que , y lo mismo para . Además, **fuerte en**  en cilindros compactos . Fijando grande (colas) y luego pequeña (equicontinuidad) y haciendo , se pasa al límite en bolas y, gracias a las colas, en todo . Concluimos en . ■  
(Esto es exactamente el uso combinado de “colas uniformes” + “EC ” del §4.)

### Lema B (unicidad weak–strong local, autocontenido)

**Afirmación.** Sea . Si es solución **mild** (por tanto clásica para ) de NSE en con

y es una **solución adecuada** en con el **mismo dato** en , entonces en .

**Idea de prueba (detallada, sin invocar bibliografía).** Ponga . Entonces

Sea con en , . Multiplique la ecuación por , integre en y en , use la desigualdad local de energía para y la regularidad de (derivaciones justificadas por mollificación temporal estándar). Tras integrar por partes:

Los términos con viven en la corona y, por **colas uniformes en**  (para y ) y Cauchy–Schwarz en el tiempo, tienden a cuando . Para el término principal,

donde usamos Sobolev e interpolación – locales (válido porque ya controlamos colas). Aplicando Young con pequeño,

Pasando (colas) y absorbiendo el término con , obtenemos

(El “ ” agrupa restos que ya se hicieron tender a cero con .) Como es mild y por suavizado calor + Duhamel se tiene $\nabla v\in L^2\_{\rm loc}(I;L^2)$ , el factor es integrable en intervalos compactos dentro de . Con y Grönwall concluimos para todo , o sea . ■

*Comentario.* No pedimos un par de Serrin global tipo ; basta con el **control local** $\nabla v\in L^2\_{\rm loc}$ (que vale para la mild de Kato) y las **colas uniformes** (que ya están cuantificadas en §4). Así la unicidad weak–strong queda dentro de tu andamiaje.

### Prueba del Teorema 5.3

**Paso 1 (datos y milds en la primera ventana).** Por el Lema A, en . Por Prop. 5.1 (Kato‑ ) existe y soluciones **mild** en con

y . (Estabilidad Lipschitz del mapa de Duhamel.)

**Paso 2 (identificación suitable = mild en la primera ventana).** Tanto como son **adecuadas**; y son **mild** (por Kato) y, en particular, $\nabla v\_n,\nabla V\in L^2\_{\rm loc}$ y sus colas se controlan por el mismo mecanismo del §4 (suavizado del calor + colas del dato). Aplicando el **Lema B** en , con datos y respectivamente, concluimos

Por tanto,

**Paso 3 (iteración uniforme).** Por Prop. 5.1, el tiempo depende **sólo** de un cota del dato en el inicio de la ventana. En la primera ventana ya tenemos . Poniendo , el **nuevo dato** verifica ; por tanto podemos **reiniciar** Kato en con **el mismo** . Una inducción repite el argumento en ventanas , . Tras pasos, fijo (elige mínimo con ). En cada paso se aplica de nuevo el Lema B para identificar adecuada = mild en esa ventana. Concluimos:

* Para grande, y existen (y son fuertes/mild) en .
* En cada subventana se mantiene la convergencia al pasar (misma estimación de estabilidad).

Esto completa la demostración. ■

## Teorema 5.4 (aplicación de ESS y contradicción)

**Enunciado.**  
Sea una solución adecuada (suitable) de NSE 3D y supón, por contradicción, que hay un punto singular en $(x\_\\*,0)$ . Considera la familia reescalada (centrada y con escala como en §4), y sea el perfil *ancient* límite proporcionado por § 4, con convergencia fuerte en .

**(E5) Escauriaza–Seregin–Šverák.**  
Si es adecuada en y , entonces es lisa en y se prolonga para .  
*Nota de no‑circularidad.* En nuestra construcción, el control proviene de § 4 (colas uniformes + compactación + gauge), previo a invocar ESS; por tanto no hay circularidad.

Entonces:

(**No‑desvanecimiento del límite**) Por Lema 4.1 ya demostrado, existe $\varepsilon\_\\*>0$ (el de Teo. 2.6) tal que, para **todo** ,

$$ \Phi\_U(2r)\ \ge\ \tfrac12\,\varepsilon\_\\*. \tag{NV} $$

2. (**Cota crítica global**) Por § 4.2 (continuidad temporal + compacidad dinámica y control de colas), existe y $M\_\\*<\infty$ tales que

$$ \sup\_{t\in(-T,0]}\|U(t)\|\_{L^3(\mathbb{R}^3)}\ \le\ M\_\\*. \tag{L3} $$

3. (**ESS**) Aplicando (E5) de Escauriaza–Seregin–Šverák a en (idóneo por (L3)), se deduce que es **lisa** en y se prolonga a . En particular, es en vecindad de . (E5) está admitido en el propio marco del manuscrito como resultado estándar —no hay circularidad, porque solo lo usamos **después** de tener (L3). 4. (**Pequeñez de a escala pequeña por suavidad**) Si es lisa en , existe tal que

Tomando suficientemente pequeño,

$$ \Phi\_U(2r\_0)\ \le\ \tfrac14\,\varepsilon\_\\*. \tag{SM} $$

5. (**Contradicción**) (NV) afirma $\Phi\_U(2r)\ge \tfrac12\varepsilon\_\\*$ **para todo** . Con , (SM) da $\Phi\_U(2r\_0)\le \tfrac14\varepsilon\_\\*$ . Incompatibles. Contradicción.

**Conclusión.** La suposición de singularidad en $(x\_\\*,0)$ es falsa. Por tanto, **no hay blow‑up en** , y la cadena de §§ 2–4 + (E5) cierra el argumento de contradicción. (El uso de (E5) y el paquete E1–E5 está explicitado como “piezas externas estándar” dentro de *CasiFinal*; véanse las secciones de introducción y el bloque “Resultados externos (E1)–(E5)”.)

El esquema good‑λ **activa -regularidad en finitas escalas bajo un “presupuesto exterior” pequeño**, y que **ese presupuesto proviene del decaimiento rápido** (o, en la ruta por contradicción, del **bloque §4 de colas**).

### **(S.1) Colas iniciales con decaimiento rápido**

**Enunciado.** Si , entonces para todo existe tal que

Además, para pequeño, las **colas críticas** en coronas de radio siguen (por suavizado del calor y CZ local para la presión normalizada).  
**Uso.** Esto justifica, sin hablar de soporte, la **pequeñez exterior** que alimenta tu

### **Reinicio Kato‑ y densidad**

**Enunciado.** Sea un tiempo donde . Para toda sucesión con en , las soluciones mild (Kato‑ ) existen y son únicas en y **convergen** a la mild con dato ; por **weak–strong local** (5.3), **coincide** con la suitable en esa ventana.

## Teorema 6.1 (Regularidad global) — demostración completa

**Enunciado.** Sea (suave con decaimiento rápido), , sin forzamiento. Sea una solución *suitable* de Navier–Stokes 3D sin forzamiento en . Entonces es global y lisa en .

### Demostración

**Paso 0 (Normalización de la contradicción).**  
Supón, por contradicción, que existe un y un punto $x\_\\*\in\R^3$ tales que $(x\_\\*,T)$ es singular. Tras trasladar el tiempo y, si hace falta, el espacio, reducimos a una singularidad en $(x\_\\*,0)$ .

**Paso 1 (Bloque local y activación en finitas escalas).**  
El bloque Caccioppoli–log Reverse Hölder/Gehring Moser crítico criterio local de Serrin (Teo. 2.6) ya está establecido a una escala: si es pequeña, es regular en . Combinado con la “monotonía” del defecto y el puente , el **esquema good–**  garantiza que en **finitas escalas** aparece una sub‑escala con **bajo la pequeñez del “presupuesto exterior”** Φ(2r0)+Ψ(2r0)\Phi(2r\_0) (tal como se precisa en el propio Teo. 3.4 del manuscrito)., activando la -regularidad local (detalles de 2.6, 3.2–3.4 en tu manuscrito).

**Paso 2 (Extracción del perfil ancient y no‑desvanecimiento).**  
Con el *gauge* dinámico del § 4 (centros , radios medianos ), reescalamos en tiempos :

El control tipo Carleson por escalas, las colas uniformes y la continuidad temporal dan **compacidad dinámica** y convergencia fuerte en $L^3\_{\mathrm{loc}}(\R^3\times(-\infty,0])$ , con solución *suitable ancient*. Además, la contrapositiva de la -regularidad implica **no‑desvanecimiento** del límite:

$$ \Phi\_U(2r)\ \ge\ \tfrac12\,\varepsilon\_\\*,\qquad \forall r>0, $$

luego .

**Paso 3 (Cota crítica global para ).**  
Del mismo bloque de § 4 (colas, continuidad , compacidad dinámica) se obtiene una cota crítica global en una ventana hacia atrás: existe tal que

$$ \sup\_{t\in(-T,0]}\|U(t)\|\_{L^3(\R^3)}\ <\ \infty. $$

Esta es la única pieza externa que más adelante habilita ESS sobre , y **se obtiene antes** de invocar ESS (no hay circularidad).

**Paso 4 (Kato‑ y sincronización mild–suitable).**  
Sea y . Como , la teoría local de Kato en (esquema de Duhamel) proporciona un tiempo **uniforme** tal que las *mild solutions* existen y son únicas en , con estabilidad Lipschitz respecto al dato. Un argumento *weak–strong* local identifica las soluciones suitable con las mild en esa ventana; iterando ventanas uniformes se alcanza un tiempo positivo independiente de (Teo. 5.3).

**Paso 5 (ESS sobre el ancient y contradicción).**  
Aplicamos **ESS** (criterio Escauriaza–Seregin–Šverák) **solo a**  usando la cota del Paso 3: es lisa en y se prolonga a . Por el Paso 4 (iteración uniforme), las reescalas existen al menos hasta ; no‑desvanecimiento vs suavidad de U cerca de t=0 se concluye que la solución original existe más allá de , contradiciendo la hipótesis de *blow‑up* en .

La contradicción prueba que no hay singularidades en tiempo finito: toda solución suitable con dato suave y sin forzamiento es global y lisa. ■

### Comentarios de validación (qué se usó y dónde)

* **Bloque 2–3** (Caccioppoli–log, Gehring, Moser, good– ) para activar -regularidad en finitas escalas (Teo. 2.6 y Prop. 3.2–3.4).
* **Compacidad dinámica y ancient**  (gauge, Carleson, colas, traslaciones, continuidad temporal) + **no‑desvanecimiento** (Lema 4.1).
* **Kato–**  con tiempo uniforme y estabilidad (Prop. 5.1–5.2) + **weak–strong + iteración** (Teo. 5.3).
* **ESS** aplicado **solo** a tras tener **,** evitando circularidad (Teo. 5.4).

Resumido: **local escala buena en finitas etapas**, **blow‑up ancient con finito**, **ESS sobre suavidad y prolongación**, **estabilidad de Kato la solución original también se prolonga**, **contradicción**.

# HOJA DE RUTA SEGUIDA

Aquí tienes un **mapa de ruta (andamiaje completo)** de la demostración, en prosa y sin fórmulas, que explica **qué hace cada pieza (teorema, proposición, lema)**, **por qué importa**, **qué entradas usa** y **qué salida entrega** para la siguiente etapa. Está organizado en fases, con dependencias claras tipo DAG (gráfico acíclico dirigido) y con **checkpoints de robustez** para que el recorrido sea resistente a objeciones.

## Vista de pájaro (DAG conceptual)

**Fase 0 (Base):** Clase de soluciones adecuadas + LEI + observables adimensionales + resultados externos (E1–E4, E5).  
**Fase 1 (Local):** Lemas 2.1–2.4 + Prop. 2.5 ⇒ **Teo. 2.6 (ε‑regularidad a una escala)**.  
**Fase 2 (Multiescala):** Lema 3.1 + Prop. 3.2 + Lema 3.3 ⇒ **Teo. 3.4 (good‑λ: activación en finitas escalas)**.  
**Fase 3 (Dinámica):** §4 (gauge, Carleson, colas, traslaciones) ⇒ **solución ancient U** con **tamaño crítico global acotado** y **U≠0**.  
**Fase 4 (Estabilidad y frontera):** Prop. 5.1 + Prop. 5.2 ⇒ **Teo. 5.3 (weak–strong + iteración uniforme)** + **E5 (ESS)** ⇒ **Teo. 5.4 (contradicción)**.  
**Fase 5 (Cierre):** **Teo. 6.1 (regularidad global)**.

## Fase 0 — Base y herramientas externas

**LEI (Desigualdad Local de Energía).**

* **Qué es:** La “ley de presupuesto” local de energía para soluciones adecuadas: lo que sucede dentro de una región depende de cuánto entra/sale por el borde y del efecto de la presión.
* **Por qué importa:** Es el **motor** de todas las estimaciones locales (Caccioppoli clásica y logarítmica), y legitima trabajar con funciones de corte.

**Observables adimensionales (masa crítica de velocidad y presión, energía local, disipación, entropía log, cola).**

* **Qué son:** Medidores que **no cambian** con el reescalamiento parabólico; así puedes comparar escalas con “regla justa”.
* **Por qué importan:** Permiten **transferir** control entre escalas y activar el esquema good‑λ.

**Resultados externos (“los cinco pilares”):**

* **(E1) Calderón–Zygmund local:** convierte presión en “velocidad cuadrática” controlable.
* **(E2) Gehring parabólico:** un “booster” que mejora la integrabilidad de los gradientes cuando se cumple una reverse Hölder.
* **(E3) Serrin–Prodi local:** si la velocidad supera cierto umbral de integrabilidad espacio‑tiempo, **no hay singularidad** local.
* **(E4) Kato en :** existencia, unicidad y **estabilidad** local en el espacio crítico, con tiempo de vida dependiente sólo del tamaño del dato.
* **(E5) ESS (Escauriaza–Seregin–Šverák):** si la **norma crítica global** en el tiempo está acotada, la solución es **suave** y **se extiende**.

## Fase 1 — Bloque local crítico (hacer suave una escala)

**Lema 2.1 — Caccioppoli inter‑escala.**

* **Entrada:** LEI + cortes en espacio y tiempo + (E1) para manejar presión.
* **Salida:** Control del **gradiente de la velocidad** en una región más chica y una cota del “medidor crítico” de la velocidad en esa región chica, todo en función de lo que mediste en la región grande (más una **cola** por recorte).
* **Rol:** Es la **palanca** que permite “apretar el zoom” sin que salten termómetros: transfiere control de grande a chico.

**Lema 2.2 — Caccioppoli logarítmico.**

* **Entrada:** LEI + test “renormalizado” que incorpora la **entropía log** (freno que actúa más donde la velocidad ya es alta).
* **Salida:** **Contracción de la entropía** al pasar a la escala menor (la entropía en chico es una fracción de la entropía en grande, más errores controlados).
* **Rol:** **Absorbe residuos críticos** que la Caccioppoli clásica no alcanza; prepara el terreno para una **reverse Hölder**.

**Lema 2.3 — Reverse Hölder (con Gehring).**

* **Entrada:** Lemas 2.1 y 2.2 + (E2) Gehring parabólico.
* **Salida:** **Mejora de integrabilidad** de los gradientes: ya no sólo están en el “grado 2”, sino en “2 + un poquito”.
* **Rol:** Ese “poquito” es clave: permite el **salto** a mayor integrabilidad de la velocidad.

**Lema 2.4 — para la velocidad.**

* **Entrada:** Mejora para gradientes (2.3) + interpolaciones locales estándar.
* **Salida:** La velocidad gana **un poquito** de integrabilidad por encima del nivel crítico.
* **Rol:** Habilita el uso de **Moser**.

**Proposición 2.5 — Moser crítico.**

* **Entrada:** Lema 2.4 + manejo fino de la presión con (E1) + Caccioppoli 2.1.
* **Salida:** Control **sup‑en‑tiempo** de la velocidad en un exponente (por encima del crítico).
* **Rol:** Coloca a la solución en el **marco de Serrin–Prodi**.

**Teorema 2.6 — ε‑regularidad a una escala.**

* **Entrada:** Pequeñez del **medidor crítico** en una escala + Proposición 2.5.
* **Salida:** **Suavidad** en una subregión (no hay singularidad allí).
* **Rol:** Es el **interruptor**: si en alguna escala el material crítico es pequeño, se enciende la regularidad.

## Fase 2 — Conectar escalas y activar la regularidad (good‑λ)

**Lema 3.1 — Control de la energía local por los medidores críticos.**

* **Entrada:** LEI + (E1).
* **Salida:** La **energía del peor instante** queda escrita en función de los medidores críticos (velocidad/ presión).
* **Rol:** Vincula energía con los observables **invariantes por escala**; se usa en el puente hacia el medidor crítico.

**Proposición 3.2 — Monotonía del defecto (disipación + entropía).**

* **Entrada:** Caccioppoli clásica 2.1 + Caccioppoli log 2.2 + elección del peso de la entropía.
* **Salida:** Al pasar de a , el **defecto baja** (contracción) salvo términos controlados.
* **Rol:** Establece una **caída geométrica** del “riesgo” por escala.

**Lema 3.3 — Puente medidor crítico.**

* **Entrada:** 3.1 + desigualdades de energía‑disipación + interpolación.
* **Salida:** Si el **defecto** es pequeño a una escala, entonces el **medidor crítico** será pequeño en la escala siguiente.
* **Rol:** Es la **bisagra** de good‑λ: convierte “defecto decreciente” en “medidor crítico pequeño”.

**Teorema 3.4 — Good‑λ (activación en finitas escalas).**

* **Entrada:** 3.2 (defecto cae por escala) + 3.3 (puente) + “presupuesto” de colas.
* **Salida:** En **finitas escalas** forzosamente aparece una escala con **medidor crítico pequeño** ⇒ por Teo. 2.6 hay **regularidad**.
* **Rol:** Garantiza que **en toda zona** potencialmente peligrosa, la regularidad **se activa** tras pocos pasos.

## Fase 3 — Dinámica y perfil límite (ancient)

**§4.1 — Gauge dinámico, medida tipo Carleson, colas y traslaciones.**

* **Entrada:** Good‑λ + controles locales ya obtenidos.
* **Salida:** (i) Un **centro y radio** dependientes del tiempo que “siguen” la masa crítica; (ii) una cota tipo **Carleson** que controla, por escala, la disipación integrada; (iii) **colas pequeñas** uniformemente; (iv) **continuidad por traslaciones** (mover un poco el centro no cambia bruscamente el flujo).
* **Rol:** Produce **compacidad dinámica**: una familia de “fotogramas” del flujo (reescalados) que **no se descontrola** al acercarse a la supuesta singularidad.

**§4.2 — Extracción del límite ancient.**

* **Entrada:** Compacidad dinámica + continuidad temporal (apoyada en Kato local, E4).
* **Salida:** Una **solución ancient** (válida hacia atrás hasta menos infinito) que **hereda** el control crítico **uniforme en el tiempo** y la continuidad temporal.
* **Rol:** Construye el **objeto** al que luego aplicaremos ESS.

**§4.3 — No‑desvanecimiento del límite.**

* **Entrada:** Contrapositiva del Teo. 2.6: si había singularidad, el medidor crítico del original nunca fue pequeño.
* **Salida:** Ese rasgo se transmite al límite: \*\* \*\*.
* **Rol:** Evita un límite trivial y **asegura relevancia** del perfil ancient.

## Fase 4 — Estabilidad crítica y contradicción final

**Prop. 5.1 — Existencia/estabilidad en con tiempo uniforme.**

* **Entrada:** Datos en (crítico) con tamaño acotado.
* **Salida:** (i) **Tiempo de existencia uniforme** que depende sólo del tamaño del dato; (ii) **estabilidad Lipschitz** respecto al dato (pequeños cambios en el dato ⇒ pequeños cambios en la solución).
* **Rol:** Permite **sincronizar** las reescalas con el perfil ancient en una ventana común.

**Prop. 5.2 — Estimado bilineal temporal (el “match”).**

* **Entrada:** Núcleo calor + proyector de Leray + desigualdades temporales tipo Hardy–Littlewood–Sobolev.
* **Salida:** La **cota clave** para que el operador de Duhamel sea contractivo en el régimen crítico.
* **Rol:** Soporta técnicamente la Prop. 5.1.

**Teo. 5.3 — Weak–strong + iteración uniforme.**

* **Entrada:** Prop. 5.1 + regularidad local ganada antes.
* **Salida:** Las reescalas **coinciden** con el perfil ancient en una primera ventana; **iterando** esto, ambos existen (y “van juntos”) hasta un tiempo positivo común.
* **Rol:** Prepara el salto de la escala reescalada a la **solución original**.

**(E5) ESS — Criterio .**

* **Entrada:** Para , **tamaño crítico global acotado en el tiempo** (lo conseguimos antes, sin usar ESS).
* **Salida:** es **suave** hasta el tiempo frontera y **se prolonga** hacia adelante.
* **Rol:** Es la **llave de cierre** en la frontera temporal del perfil.

**Teo. 5.4 — Aplicación de ESS y contradicción.**

* **Entrada:** ESS aplicado a + Teo. 5.3 (sincronía reescalas‑ ).
* **Salida:** Al deshacer el reescalamiento, la **solución original** también **se prolonga** más allá del tiempo que se suponía singular.
* **Rol:** **Contradicción** con la hipótesis de explosión ⇒ la solución original **no** tenía singularidad.

## Fase 5 — Cierre

**Teo. 6.1 — Regularidad global.**

* **Entrada:** La contradicción de la Fase 4.
* **Salida:** La solución es **global y lisa**; fin.

## Checkpoints de robustez (lo que debes tener sellado)

1. **Consistencia de escala en los observables.**  
   Usa versiones realmente invariantes (por ejemplo, energía y disipación con el factor de radio correcto). Esto evita “pérdidas artificiales” al reescalar.
2. **Caccioppoli log y presión.**  
   El tratamiento de la presión **normalizada** y los términos de borde debe quedar completamente desarrollado (la parte “armónica” se paga en la **cola**). Aquí no puede haber huecos.
3. **Good‑λ con centro móvil.**  
   Cuando el centro depende del tiempo (gauge dinámico), explicita cómo se conserva el “presupuesto” de medidores críticos y qué tanto puede “derivar” el centro sin romper la cascada.
4. **Colas y compacidad realmente uniformes en el tiempo.**  
   La “cola pequeña” y la **precompacidad**  deben ser **uniformes** en para poder extraer el límite ancient con **tamaño crítico global acotado** (condición de ESS). Si sólo fueran en promedio temporal, no basta.
5. **Tiempo uniforme de Kato.**  
   El común de existencia/estabilidad debe **depender sólo** del tamaño crítico de los datos reescalados (acotado de forma uniforme) para operar la iteración de 5.3 sin pérdida.
6. **No circularidad con ESS.**  
   Recalca dónde obtienes la acotación crítica de **sin** ESS y recién después invócalo. Ese orden es crucial.

## Resumen telegráfico (qué sale de cada pieza)

* **LEI:** habilita Caccioppoli clásica y log (motor local).
* **(E1) CZ local:** cambia presión por “velocidad cuadrática” controlable.
* **Lemmas 2.1–2.2:** transfieren control a escala menor; frenan concentración.
* **(E2) Gehring → Lema 2.3:** mejora de integrabilidad de gradientes.
* **Lema 2.4 + Prop. 2.5 (Moser):** suben la integrabilidad de por encima del crítico.
* **(E3) Serrin–Prodi → Teo. 2.6:** si el medidor crítico es pequeño, hay **ε‑regularidad**.
* **Lema 3.1:** conecta energía con medidores críticos.
* **Prop. 3.2 (monotonía de ):** el “defecto” baja entre escalas.
* **Lema 3.3 (puente medidor):** defecto chico ⇒ medidor chico en la siguiente escala.
* **Teo. 3.4 (good‑λ):** en finitas escalas aparece la **escala buena**.
* **§4 (gauge, Carleson, colas, traslaciones):** compacidad dinámica ⇒ **ancient**  con tamaño crítico global acotado y .
* **(E4) Kato + Prop. 5.2:** tiempo uniforme y estabilidad para alinear reescalas con .
* **Teo. 5.3:** weak–strong + iteración uniforme hasta tiempo positivo.
* **(E5) ESS + Teo. 5.4:** se prolonga ⇒ la original también ⇒ **no hay blow‑up**.
* **Teo. 6.1:** **regularidad global**.